ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 3 DÉCEMBRE 1923.

PRÉSIDENCE DE M. ALBIN HALLER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Lasareff**, Membre de l'Académie des Sciences de Petrograd, qui assiste à la séance.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Intégrales définies se rattachant à la constante* C *d'Euler*. Note de M. **Paul Appell**.

En désignant par (n) l'indice d'une dérivée d'ordre n et par log un logarithme népérien, nous avons

$$\Gamma_1^{(n)} = \int_0^\infty e^{-u}(\log u)^n\, du, \qquad \Gamma_{\frac{1}{2}}^{(n)} = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}(\log u)^n\, du;$$

posons ensuite

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots.$$

L'intégrale $\Gamma_1^{(n)}$ s'exprime par un polynome $P_n(C)$, de degré n en C, dont les coefficients contiennent les sommes S_k (k entier); l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma_{\frac{1}{2}}^{(n)}$ s'exprime de même par un polynome $Q_n(D)$ obtenu en remplaçant, dans $P_n(C)$, la constante C par $D = C + 2\log 2$ et S_k par $(2^k - 1)S_k$. On trouve, par exemple, S_2 étant, comme il est bien connu, égal à $\frac{\pi^2}{6}$,

$$\Gamma'_1 = -C, \qquad \Gamma''_1 = C^2 + S_2, \qquad \Gamma'''_1 = -C^3 - 3S_2C - 2S_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'_{\frac{1}{2}} = -D, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma''_{\frac{1}{2}} = D^2 + 3S_2, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'''_{\frac{1}{2}} = -D^3 - 9S_2D - 14S_3.$$

On a, ainsi qu'on peut le vérifier sur les polynomes précédents,

$$\frac{dP_n}{dC} = -nP_{n-1}, \quad \frac{dQ_n}{dD} = -nQ_{n-1}.$$

Je compte donner les calculs, avec quelques formules complémentaires, dans un autre recueil.

GÉOLOGIE. — *Sur les nappes de recouvrement du Nord-Ouest Africain.* Note de M. **Louis Gentil**.

La question des nappes de charriage dans l'Afrique du Nord a son importance, au multiple point de vue de la structure, du relief du sol et des applications diverses de la géologie dans notre empire colonial méditerranéen.

Nous avons appelé l'attention de l'Académie sur ces phénomènes de recouvrement, MM. Lugeon, Joleaud et moi en 1918 (1), tandis que je révélais leur extension dans le couloir de Taza où une nappe éocène a chevauché les dépôts du détroit Sud-Rifain (2).

Depuis cette époque de nombreuses discussions ont été soulevées, sinon à propos de la région de Taza, du moins au sujet de l'existence même de nappes de recouvrements dans l'Afrique du Nord.

Je crois devoir apporter de nouvelles précisions sur cette question, et il me semble, à cet égard, que la coupe géologique la plus instructive de tout le Nord marocain est celle que l'on peut relever suivant le méridien de Taza, en se déplaçant du Sud vers le Nord.

Ainsi que je l'ai déjà montré, le détroit Sud-Rifain était ouvert dès le Burdigalien.

Cet étage est représenté sous le Fort Kappler, près de Taza, par un petit poudingue et des grès grossiers renfermant une faunule caractérisée par *Flabellipecten incrassatus* Partsch, avec *Fl. fraterculus* Sow., *Pecten praescabriusculus* Font., *P. Josslingi* Sm. var. *loevis* Cotter, *Amussium subpleuronectes* d'Orb. sp.

Ce conglomérat de base s'appuie, légèrement relevé vers le Sud, sur des calcaires jurassiques. Il est, ainsi que les grès grossiers, surmonté d'une série marneuse puissante pouvant encore appartenir au Burdigalien dans ses assises inférieures et représentant, pour la plus grande partie, l'Helvétien. Ce sont des marnes d'un gris blan-

(1) *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 217, 290, 472 et 614.

(2) *Bull. Soc. Géol. de France*, séance du 4 mars 1918.

châtre ou bleuâtre, plus ou moins sableuses, à facies de Schlier, qui se développent sur une épaisseur pouvant atteindre 200^{m}. J'ai recueilli dans ces marnes, à environ 5^{km} au sud-est de Taza : *Lutraria oblonga* Chtz., *Venus multilamella* Lmk., *Tellina donacina* L., *Arca diluviana* L., *Leda fragilis* Chtz., *Cardium turonicum* Mayer, *Flabellifecten fraterculus* Sow., *Meretrix islandicoides* Lmk., *Pecten cristatocristatus* Sacc., *Scaphander lignarius* L., *Natica* sp., *Pyrula* sp., *Turritella turris* Bast. Cette faune est helvétienne; elle se trouve à la base des marnes bleues à facies de Schlier où j'avais signalé antérieurement *Clypeaster marginatus* Lmk. et *Cl. decemcostatus* Pomel, caractéristiques du deuxième étage méditerranéen (Helvétien).

Ces nappes se développent, au Nord, dans la vallée de l'Innaouen. Dans la coupure de cette rivière, sur la rive droite, j'ai recueilli dans les mêmes dépôts, à un niveau un peu plus élevé : *Tellina planata* L., *T. donacina* L., *Amussium cristatum* Bronn., *Arca diluviana* L., *Genota* cf. *Craverii* Bell., *Schizaster* indét. [1].

Enfin dans la haute vallée de l'oued Innaouen, notamment au sud d'Ar'bal, la série marneuse est surmontée de poudingues à gros galets de roches jurassiques paléozoïques cimentés par un grès jaune argilo-sableux renfermant en abondance *Ostrea crassissima* Lmk. Cette assise, épaisse d'une quarantaine de mètres, termine le deuxième étage méditerranéen et représente le Tortonien.

Plus au nord de Taza, sur la rive droite de l'oued Innaouen, les marnes bleues miocènes sont dominées par un escarpement (Bab Kassem, Bab ben Selah, etc.), au pied duquel affleurent des marnes bariolées gypso-salifères du Trias lagunaire, tandis que la falaise elle-même marque la limite d'un grand développement de terrains éocènes dont j'ai antérieurement révélé l'existence.

En effet, des grès et sables glauconieux, de la vallée de l'oued el Hadar, renferment *Voluta depressa* et *Cucullaea crassatina* du Thanétien ; des marnes olivâtres épaisses, avec bancs de calcaires marneux et des marnes blanchâtres à silex noirs renferment, dans la vallée de l'oued Lârbâ, des lits phosphatés avec *Otodus obliquus* Agassiz, *Odontaspis elegans* Az., etc., de l'Éocène inférieur. A Bab Moroudj, à environ 25^{km} au nord de Taza, cette série éocène offre de gros bancs de calcaires à *Lithothamnium* avec *Ostrea gigantica* Solander, *Chlamys subtripartitus* d'Arch., avec petites Nummulites et, près du col de Bou Djenan, des calcaires pétris de Nummulites offrent *Nummulites atacicus* Lym., *N. Bolcensis* Mun. Ch., *N. irregularis* Desh., qui caractérisent le Lutétien inférieur. Plus au Nord encore j'ai vu affleurer une série de grès et de schistes qui m'est apparue comme représentant le Flysch éocène-oligocène, si répandu dans l'Afrique du Nord et, au Maroc, dans la région de Tanger.

La série miocène se développe régulièrement, du Sud vers le Nord, jus-

---

[1] M. G. Lecointre a signalé des éléments de faune synchronique dans la région de Taza (*C. R. som. Soc. Géol. de Fr.*, 17 mai 1920, p. 102). Je le remercie vivement des comparaisons qu'il a bien voulu faire de mes matériaux avec ses documents.

qu'au pied de la falaise triasique et éocène de Bab Kassem et l'Éocène est *manifestement* en recouvrement sur les marnes du deuxième étage méditerranéen. Les dépôts éocènes forment une vaste nappe de charriage, poussée du Nord vers le Sud sur le Néogène, avec interposition de Trias lagunaire laminé et étiré.

On peut d'ailleurs s'en rendre compte au simple examen de la carte géologique générale du Maroc que j'ai publiée en 1921 ([1]). On y voit, en effet, le Miocène affleurer, sur une bande étroite, entre Taza et Sidi Abdallah, dans la vallée de l'Innaouen, pour s'étaler, à l'Est, vers la Mlouya, à l'Ouest, vers Fez; tandis que l'Éocène recouvre, au nord de l'Innaouen, de grandes surfaces qui se poursuivent vers le Nord-Ouest, jusqu'au détroit de Gibraltar.

Les contours de ces terrains paléogènes, entre Fez et Taza, que j'ai reportés sur eette carte d'après mes propres levés de détails, sont particulièrement instructifs. Toutes les vallées affluentes de l'Innaouen descendent du Nord vers le Sud, échancrent la nappe éocène pour laisser affleurer le Miocène, témoignant ainsi de la superposition anormale de l'Éocène sur le Miocène. De plus, le contour de l'Éocène montre de fréquents affleurements de Trias lagunaire en bandes étroites, discontinues.

On peut observer ce phénomène, notamment aux environs même de Taza et dans la vallée de l'oued Amelil. De ce côté, le front de la nappe éocène s'avance jusque sur les schistes anciens, au col de Touahar : la nappe a, en ce point, chevauché toute la largeur du détroit Sud-Rifain, y compris les couches de base à *Flabellipecten incrassatus*. Et, à Koudiat el Abiod, on peut observer sur les marnes helvétiennes à *Clypeaster marginatus*, un rocher formé de schistes anciens, avec filon de quartz qui n'est autre qu'un lambeau de poussée (ou une Klippe) en relation avec la nappe éocène qui n'en est séparée que par la coupure de l'Innaouen.

Au nord de Taza, la nappe éocène est fortement repliée sur elle-même. Il y a contact par faille avec les marnes à facies de Schlier et l'on peut voir que celles-ci ont été comprimées, refoulées, sous la pression gigantesque qu'a exercé la nappe en mouvement. Ces marnes ont pris ici une consistance dure, elles se débitent plus difficilement en fragments à structure conchoïde, prenant ainsi le facies du « Cartennien » qui se présente, à mon sens, toutefois que les marnes du Schlier, quel que soit leur horizon stratigraphique, se trouvent au bord de massifs plissés.

([1]) *Carte géologique provisoire du Maroc à* 1 500000e (E. Larose, éditeur, Paris, 1921).

Quant aux marnes bariolées triasiques, elles affleurent à ce contact, interposées entre les marnes calcaires à silex éocène et les marnes miocènes.

Si l'on se déplace vers le Nord on recoupe une série de plis de l'Éocène, grossièrement alignés Est-Ouest, toujours déversés vers le Sud et laissant apparaître, dans des anticlinaux aigus éventrés par l'érosion, soit le Trias, soit les marnes du Schlier.

L'apparition du Miocène autochtone se fait à quelque 20^{km} au nord du front de la nappe, au Dj. Rouf. On trouve, de ce côté, une *fenêtre* assez étendue entaillée dans la nappe. Cette fenêtre est entourée de toutes parts d'une bordure éocène avec marnes bariolées et gypses du Trias fortement laminés et formant une bande discontinue autour de l'affleurement miocène. De petits témoins triasiques, sur les marnes néogènes, témoignent encore de leur situation en recouvrement.

Dans cette même région se montre, reposant sur le Trias, un lambeau de grès coquiller, sorte de lumachelle ocreuse, surmontée d'une molasse à grands Pectinidés dans laquelle j'ai recueilli : *Venericardia Jouanneti* Bast., var. *læviplana* Dep., *Pectunculus* sp., *Flabellipecten fraterculus* Sow., *Pecten Kochi* Locard, *P. revolutus* Mich., *P. Reussi* Hoernes, *Chlamys multistriata* Poli, *Natica* sp., *Pyrula geometra* Bors., et, dans la molasse : *Pecten latissimus* Brocc. et *P. gigas* Schl.

Cette faune caractérise le Tortonien. Il m'a semblé que les dépôts qui la renferment étaient postérieurs à la nappe de charriage, mais je n'ai pu pousser mes observations en ce point : je ferai donc quelque réserve à ce sujet.

Ainsi, l'existence d'une nappe éocène qui s'est avancée sur les dépôts exondés du détroit Sud-Rifain jusqu'aux approches de Taza me paraît indiscutable. Cette nappe repose sur les marnes du deuxième étage méditerranéen avec interposition d'un Trias lagunaire laminé, étiré. Elle s'étend partout, au sud et à l'ouest des crêtes du Rif, dans la grande dépression orographique du détroit Sud-Rifain.

J'estime que c'est à cette nappe de recouvrement que se rattachent tous les phénomènes tectoniques de la vallée moyenne du Sebou.

Je ne crois plus à la nécessité d'admettre l'existence d'une nappe triasique indépendante ainsi que nous l'avons fait en 1918, MM. Lugeon, Joleaud et moi. Il me paraît plus simple d'admettre que le Trias lagunaire, formé surtout de roches plastiques, a été refoulé, poussé par la nappe éocène en progression; mais je ne crois pas, après de nombreuses observations faites depuis 1918, qu'il ait existé une nappe triasique qui aurait précédé le cheminement de la nappe éocène.

De même, je pense qu'il faudra renoncer à envisager l'existence d'une nappe jurassique dans le massif du Zerhoun-Tselfat. De nombreuses études ont été faites dans cette région, suscitées par la recherche du pétrole, et il me paraît difficile d'admettre qu'on se trouve là dans une région de vraies nappes : j'y vois plutôt une région d'écailles ou de plis imbriqués n'ayant que très peu chevauché l'un sur l'autre. J'en dirai autant du noyau jurassique du Djebel Zalar, situé au nord de Fez. Ici, comme là, le Jurassique est enraciné. Il me semble beaucoup plus simple d'admettre que ces écailles résultent d'un refoulement du Jurassique et des marnes miocènes autochtones en avant et très près de la zone frontale de la nappe éocène, refoulement trop léger pour donner lieu à la formation de nappes.

A l'est de Taza, l'Éocène est encore en recouvrement sur le Miocène au Dj. Khlalka, au Dj. Goribis, etc., et, dans la zone littorale, les mêmes phénomènes tectoniques se relient à ceux que j'ai étudiés dans l'Oranie occidentale. Mais, de ce côté, la nappe éocène a laissé place à une nappe jurassique, surtout liasique, avec interposition de Trias lagunaire.

J'ai montré l'existence de ces phénomènes dans la zone d'influence espagnole, chez les Kebdana. Au delà de la frontière algéro-marocaine, j'ai observé de très beaux phénomènes de chevauchement du Lias sur le Miocène, notamment au Dj. Zendal, avec bordure de Trias laminé. Des lambeaux épargnés par l'érosion s'échelonnent sur une dizaine de kilomètres de profondeur tandis que le massif des Beni Snassen et le Dj. Filhaoucen offrent un régime de plis imbriqués, légèrement refoulés sur l'avant-pays de la nappe liasique. Et l'on peut, de proche en proche, relier ces lambeaux de recouvrement à celui de Dj. Tadjera, dans le massif des Trara où j'ai montré, dès l'année 1902, que le Lias, enraciné au bord de la mer, était refoulé sur le Miocène, toujours avec interposition de Trias lagunaire laminé. Il est à remarquer que, dans cette région oranaise, le régime tabulaire est situé non loin de là, dans les monts de Tlemcen et que les dépôts miocènes de la Mlouya et de la Tafna, en continuité sous la plaine d'Angad, ont été comprimés, ici, comme au seuil de Taza ; ils se trouvent encore là sur le trajet de l'ancien détroit Sud-Rifain.

MÉCANIQUE. — *Sur l'emploi des volants dans les groupes électrogènes et sur les dangers de résonance des arbres des moteurs à explosion qui les commandent.* Note de M. A. **Blondel**.

I. *Emploi d'un volant* I_1 *pour réduire les oscillations de la masse* I_2 *de la dynamo.* — J'ai traité ce problème assez complètement, il y a trente ans, à l'occasion du couplage des alternateurs [1], puis de l'entraînement des dynamos [2]. J'ai montré que :

1° La liaison élastique modifie l'amplitude des oscillations suivant le rapport

$$\frac{1}{1 - \frac{n^2 T^2}{\tau^2}}$$

en appelant n le rang de l'harmonique, τ la période du couple, T celle d'une inertie $K = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}$ soumise à l'action du couple élastique de liaison C.

On doit faire en général $T^2 > 2\tau^2$.

2° On a avantage à employer les liaisons amorties, ce qui explique les bons résultats de l'accouplement Raffard.

3° Pour réaliser le meilleur effet avec une inertie totale donnée $I_1 + I_2$, on devra prendre $I_1 = I_2$, c'est-à-dire *partager également l'inertie entre l'arbre moteur et l'arbre récepteur.*

Le calcul, dans lequel on suppose l'arbre moteur rigide, ne peut donner aucune indication sur la fatigue de cet arbre, car le couple exercé par l'arbre sur le volant et dont dépend le travail de l'arbre, est forcément égal au couple moteur lui-même, qui est supposé transmis intégralement au volant I_1.

II. *Risque de résonance de l'arbre du moteur.* — Le calcul qui précède ne peut pas indiquer le risque de résonance de l'arbre du moteur parce que ce dernier présente par lui-même une certaine inertie et une certaine élasticité dont il n'a pas été tenu compte. La manière la plus schématique de traiter ce second problème, c'est de représenter l'ensemble du système

---

(1) *La Lumière électrique*, 19 novembre 1892, p. 363, et *Bull. Soc. Int. des Électriciens*, 1893, p. 147.

(2) *Bull. Soc. Int. des Électriciens*, t. 12, 1895, p. 18. Voir aussi *ibidem* des Communications de MM. C.-E. Guillaume, Arnoux, Desroziers.

tournant par trois inerties; celle I_1 de l'arbre et de ses vilebrequins supposés concentrés en une seule masse; l'inertie I_2 du volant placé au bout d'arbre et relié à la première masse par la torsion de l'arbre ramené à la demi-longueur de celui-ci; enfin l'inertie I_3 du volant et de l'induit de la dynamo entraînée par les ressorts de l'accouplement élastique; ces inerties I_1, I_2, I_3 sont reliées par deux systèmes élastiques à coefficients de torsion C_1 et C_2 applicables respectivement à l'arbre et à l'accouplement élastique.

La fatigue de l'arbre est une fonction des oscillations propres du système formé par l'arbre et les deux inerties qui sont à ses deux bouts, et sera mesurée par le couple $C_1\Theta_1$, en appelant Θ_1 l'angle de torsion de l'arbre.

Si le couple produit par le moteur était sinusoïdal, il ne pourrait y avoir de danger qu'en cas d'égalité entre la période de ce couple qui produit des oscillations forcées et la période propre des oscillations libres (modifiées par l'amortissement). Les dangers de rupture d'arbre seraient donc excessivement faibles et faciles à éviter.

En réalité, il en est autrement avec les moteurs à explosion parce que ceux-ci donnent des courbes de couples présentant des discontinuités brusques, discontinuités qui, répétées périodiquement, peuvent donner lieu à toute la série des harmoniques d'ordres multiples par rapport à la période fondamentale. En effet, la période fondamentale est celle donnée par un seul des pistons, mais comme elle est dissymétrique, elle contient des harmoniques non seulement impairs, mais pairs.

On peut simplifier beaucoup l'écriture des équations en introduisant directement les amplitudes de la partie variable du couple et en faisant abstraction de la partie constante, qui s'élimine toujours d'elle-même dans les équations si l'on suppose le couple résistant constant, car ce dernier est alors égal à la partie constante du couple moteur.

Le couple variable étant formé d'une série de termes harmoniques g_n représentés par la formule

$$g_n = \Gamma_n \sin n\,(\Omega t + \gamma_n), \tag{1}$$

nous représenterons son amplitude en grandeur et en phase, en notations complexes, par la formule

$$\Gamma_n(\cos n\gamma_n + j\sin n\gamma_n), \tag{2}$$

en désignant par j le symbole des imaginaires $\sqrt{-1}$.

Dans les mêmes notations complexes, les angles α, décrits par les masses

présentant de l'inertie, ont leurs dérivées représentées par les équations symboliques :

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = jn\Omega\alpha; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(n\Omega)^2\alpha; \quad \frac{d\Theta}{dt} = jn\Omega\Theta; \quad \ldots.$$

Cela posé, si l'on appelle I_1 l'inertie supposée concentrée de l'arbre et de ses manivelles, α_1 l'angle qu'il décrit; I_2 l'inertie du volant et α_2 l'angle qu'il décrit; I_3 l'inertie de la dynamo accompagnée de son volant, les deux volants étant reliés par un accouplement élastique, α_3 l'angle qu'il décrit; C_1, C_2 les coefficients de torsion de l'arbre de l'accouplement; Δ_1, Δ_2 les angles de torsion, on peut écrire directement les cinq équations du système en *amplitudes* sous la forme (4) :

$$(4) \qquad \begin{cases} C_1\Theta_1 - (n\Omega)^2 I_1\alpha_1 = \Gamma_n, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \Theta_1 = 0, \\ C_1\Theta_1 + (n\Omega)^2 I_2\alpha_2 - C_2\Theta_2 = 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \Theta_2 = 0, \\ C_2\Theta_2 + (n\Omega)^2 I_3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ces cinq équations sont linéaires et la première seule a un second membre. La résolution se fait donc très facilement par la méthode classique des déterminants; le déterminant des coefficients des cinq variables rangées dans l'ordre, α_1, Θ_1, α_2, Θ_2, α_3, s'écrit immédiatement :

$$(5) \qquad \Delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \Theta_1 & \alpha_2 & \Theta_2 & \alpha_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -(n\Omega)^2 I_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & (n\Omega)^2 I_2 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & (n\Omega)^2 I_3 \end{vmatrix} \end{array}.$$

Il suffira de substituer la colonne des seconds membres (dont la première ligne seule n'est pas un zéro) à une quelconque des colonnes du déterminant pour avoir le numérateur correspondant de l'expression de chacune des variables inscrites au sommet de la colonne.

Le dénominateur commun Δ de toutes les expressions peut s'annuler pour certaines valeurs de n et l'on dira alors qu'il y a résonance. En développant le déterminant; on trouve cette équation de la résonance sous une forme assez complexe. En posant $n\Omega = \omega$ pour simplifier, elle est

$$0 = \Delta = (C_1\omega^2 I_2)(C_2 - \omega^2 I_3)\omega^2 I_2 + C_2\omega^2 I_3(C_1 - \omega^2 I_1) + (C_2 - \omega^3 I_3)C_1\omega^2 I_1;$$

d'autre part, on trouve pour Θ_1 l'équation

$$\Gamma_n = \Theta_1\left(C_1 - \omega^2 I_1 + \frac{C_1 I_1}{I_2 + \frac{C_2 I_3}{C_2 - \omega^2 I_3}}\right).$$

L'équation de résonance a trois racines ω possibles.

La fatigue de l'arbre sera mesurée par l'expression $C_1\Theta_1$ déduite de ce calcul et qui devient infinie quand la résonance se produit. La seconde formule montre que la valeur de Θ_1 devient minimum en fonction de I_2 pour $I_2 = 0$, c'est-à-dire quand on n'ajoute aucun volant sur l'arbre moteur. Comme la vitesse ω varie elle-même pendant la mise en marche du système, il se produira différents régimes de résonance avant d'arriver à la vitesse normale; mais ces résonances ne seront surtout dangereuses que si elles se prolongent, c'est-à-dire que si elles sont voisines du régime de la vitesse normale.

L'expression de Θ_1 montre que pour une même somme d'inerties $I_2 + I_3$ ajoutée au moteur, en dehors de l'arbre de manivelle (c'est-à-dire inertie totale de la dynamo, des volants et des organes d'accouplement), le danger de résonance sera d'autant plus réduit que le volant ajouté sur l'arbre sera plus voisin de la valeur satisfaisant à la relation

$$I_2 \frac{C_2 I_3}{C_2 - \omega^2 I_3} = 0$$

ou

$$I_2\left[\frac{\omega^2}{C_1} - \frac{1}{I_3}\right] = 1$$

I_2 devra donc être d'autant plus réduits que $\frac{\omega^2}{C_2}$ sera plus grand.

Mais le schéma simplifié que nous venons de donner ne résout pas le problème d'une manière suffisante, car l'amplitude dangereuse des harmoniques peut être accrue ou diminuée par le nombre de manivelles, suivant l'angle de calage et le retard de phase des efforts sur ces manivelles. D'autre part la masse, au lieu d'être concentrée, est en réalité répartie; un arbre à plusieurs vilebrequins peut être considéré comme formé d'une série de masses présentant des inerties séparées par des tronçons d'inertie plus faible soumis à des torsions [1].

---

[1] Pour traiter le problème dans toute sa rigueur, il faudrait recourir à l'équation des torsions d'une tige tordue portant en différents points des masses; l'intégration

Pour la sécurité de l'arbre, le volant doit être en dehors de l'arbre et relié à lui par un couplage élastique assez lâche. Dans ce cas, en effet, les oscillations forcées de l'arbre se font des deux côtés du milieu de l'arbre et il peut y avoir résonance, avec des oscillations angulaires aux deux bouts de l'arbre, l'amplitude de ces oscillations dépendant seulement de la différence entre les effets des harmoniques appliqués par les manivelles des deux côtés de l'arbre. Au contraire, si l'arbre est relié à un volant de grande masse, celle-ci agit comme un encastrement de l'arbre dans un support fixe par rapport aux oscillations du couple des différentes manivelles. La résonance se fait avec ventre d'oscillation à l'extrémité libre de l'arbre et sous l'effet combiné de toutes les manivelles, les vibrations angulaires peuvent être de beaucoup plus grande amplitude et amener ainsi la rupture de l'arbre près du volant et celle des organes commandés par le bout libre.

On peut simplifier le calcul en ramenant schématiquement l'arbre et ses manivelles à une série de masses reliées par des parties élastiques. Cela revient à remplacer les équations différentielles de la torsion par des équations aux différences finies, l'arbre étant divisé en tronçons limités au milieu des deux bouts d'arbre des paliers ; on désignera par I l'inertie de chaque tronçon, y compris son vilebrequin, et par α l'angle décrit par l'arbre manivelle correspondant. On déterminera d'autre part le coefficient de torsion pour l'ensemble des tronçons compris entre les points milieux de deux manivelles consécutives. L'hypothèse simplificatrice consiste à supposer que les inerties I sont reliées entre elles par des accouplements élastiques de coefficients C ainsi calculés.

Cela posé, on tiendra compte des retards de phase entre les explosions des p différents pistons en représentant les irrégularités de couple pour chacun d'eux par une formule de la forme (2). Les écarts de phase γ entre les pistons seront des multiples de $\frac{4\pi}{p}$ (dans le cas de cycles à 4 temps), qui dépendront de la façon dont sont répartis les arbres manivelles.

Chaque tronçon donne lieu à deux équations, l'une qui exprimera l'égalité des couples moteur et résistants, l'autre qui exprimera l'égalité entre les angles de torsion et la différence des angles perturbateurs produits par l'oscillation d'harmoniques quelconques entre les inerties voisines.

---

des équations différentielles de ce genre conduit à des fonctions hyperboliques complexes qui sont très peu maniables. Il ne paraît pas justifié d'ailleurs d'appliquer des calculs si précis, étant donné toutes les hypothèses simplificatrices que l'on est obligé de faire.

On aura en définitive pour les amplitudes des mouvements oscillatoires la série d'équations symboliques ci-dessous :

$$
(6) \quad \begin{cases}
C_1\Theta_1 - (n\Omega)^2 I_1 \alpha_1 = \Gamma_n \ldots (\varphi_1 = 0), \\
\alpha_1 - \alpha_2 = \Theta_1, \\
- C_1\Theta_1 - (n\Omega)^2 I_2 \alpha_2 + C_2\Theta_2 = \Gamma_n(\cos n\varphi_2 + j \sin n\varphi_2), \\
\alpha_2 - \alpha_3 = \Theta_2, \\
- C_2\Theta_2 - (n\Omega)^2 I_3 \alpha_3 + C_3\Theta_3 = \Gamma_n(\cos n\varphi_3 + j \sin n\varphi_3), \\
\alpha_3 - \alpha_2 = \Theta_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
- C_p\Theta_p - (n\Omega)^2 I_{p+1} \alpha_{p+1} = 0.
\end{cases}
$$

Ces équations linéaires sont au nombre de $2p+1$, en appelant p le nombre de manivelles; par exemple, un moteur à six manivelles donne lieu à treize équations; comme elles sont linéaires et à coefficient constant par rapport aux angles variables α_1, α_2, α_3, ..., α_6 et Θ_1, Θ_2, Θ_3, ..., Θ_6, leur solution est théoriquement toujours possible par des déterminants. Ces équations comportent des seconds membres qui représentent les couples perturbateurs.

Le déterminant des coefficients du premier nombre est de degré $p+1$ en ω; ce degré peut s'abaisser dans certains cas, en tenant compte de l'égalité de certains coefficients I et C.

Le dénominateur commun de toutes les expressions des variables sera le déterminant des premiers membres; en l'annulant, on aura la condition de résonance qui permet de déterminer les harmoniques dangereux et les vitesses critiques dangereuses. La solution est malheureusement encore très complexe et difficile à pousser jusqu'au bout, même sur des cas particuliers, à moins qu'il y ait très peu de manivelles, car pour avoir les amplitudes réelles des angles Θ qui mesurent la fatigue de l'arbre en ses différents points, il ne suffit pas de calculer le déterminant, lequel est indépendant des phases de calage, mais il faut tenir compte de ces angles à cause des seconds membres des équations, et des amortissements. Je donnerai quelques explications physiques sur ce sujet dans une prochaine Note.

Le calcul appliqué à un ensemble si complexe peut servir à prédéterminer avec plus au moins de chance de succès les risques de résonance et à chercher à les éviter; mais si l'on désire être fixé d'une manière certaine sur les conditions de résonance d'un pareil arbre et sur l'amplitude des torsions qu'il subit, il me semble nécessaire de recourir à une méthode expérimentale permettant de mesurer directement les angles de torsion de l'arbre

et par la même occasion les irrégularités de vitesse. Ce résultat peut être obtenu assez facilement en adaptant à ce problème la méthode générale d'étude stroboscopique des écarts angulaires des arbres des machines à explosion, que j'ai exposée à l'Académie dans une précédente Communication ([1]).

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur quelques propriétés des traces des tangentes asymptotiques d'une surface en un plan fixe.* Note de M. C. **Guichard.**

Soient A un point qui décrit une surface rapportée à ses asymptotiques; AR la première tangente en A, AS la seconde. Ces droites coupent un plan fixe Π respectivement en P et Q; tout point de AR décrit, quand u varie seul, une courbe dont la tangente est située dans le plan RAS; en particulier le point P décrit une courbe tangente à PQ; de même, si v varie seul, le point Q décrit une courbe tangente à PQ. La droite PQ décrit donc une congruence plane dont les foyers sont P et Q. Je me propose de caractériser cette congruence PQ.

Pour cela, je suppose que le plan Π soit le plan des x_1, x_2; j'introduis, pour un instant, les coordonnées homogènes, le plan à l'infini ayant pour équation $x_4 = 0$. Je fais une transformation homographique qui fait correspondre au plan Π le plan à l'infini. A la surface (A) correspond une surface (A_1) rapportée à ses asymptotiques. Les paramètres directeurs θ_1, θ_2, θ_3 de la surface (A_1), multipliés par un facteur convenable, sont trois solutions d'une équation de Moutard. Le plan tangent en A_1 coupe le plan à l'infini suivant une droite L qui a pour équations

$$x_4 = 0, \qquad \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = 0.$$

En faisant la transformation homographique inverse, on en conclut que la droite PQ a pour équation

$$x_4 = 0, \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_4 = 0,$$

les ξ étant des fonctions linéaires et homogènes de θ. Si l'on revient aux coordonnées cartésiennes, on voit que la droite PQ a pour équation, dans le plan $x_1 x_2$,

$$(1) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \zeta_3 = 0,$$

([1]) Cf. *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 320.

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant trois solutions de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = M\xi.$$

Au point de vue analytique ce résultat caractérise les congruences PQ. Il reste à indiquer une propriété géométrique équivalente.

Le premier foyer P de la droite PQ est défini par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 = 0, \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} x_1 + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u} x_2 + \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \xi_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} \dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u} \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que les paramètres des tangentes au réseau P sont :

Première tangente : $\xi_2, -\xi_1$;

Deuxième tangente : $\dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}, -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}$.

Si l'on considère une congruence plane de Ribaucour, les paramètres directeurs de la droite décrivante étant ξ_1 et ξ_2, on sait que les paramètres des tangentes à son second réseau focal Q′ sont :

Première tangente : $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}, \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}$;

Deuxième tangente : ξ_1, ξ_2.

Donc les réseaux P et Q′ se correspondent par la loi d'orthogonalité des éléments, d'où le résultat suivant qui caractérise les congruences PQ.

La congruence PQ *correspond par orthogonalité à une congruence plane de Ribaucour.*

La congruence PQ satisfaisant à la condition précédente étant donnée, il reste à voir quelles sont les surfaces (A) satisfaisantes ; si l'on fait l'homographie indiquée, on voit que la trace L du plan tangent à (A_1) sur le plan de l'infini est donnée ; on sait que toutes les surfaces (A_1) correspondantes se déduisent de l'une d'elles par une homothétie ou une translation, c'est-à-dire par une homologie qui admet le plan à l'infini comme plan directeur ; donc :

Toutes les surfaces (A) *qui correspondent à une même congruence* PQ *se*

déduisent de l'une d'elles par une homologie admettant le plan Π *comme plan directeur.*

Ce résultat permet de résoudre simplement un très grand nombre de problèmes; je cite les suivants :

I. *Trouver deux surfaces* (A) *et* (A′) *sur lesquelles les asymptotiques se correspondent et telles que la première tangente asymptotique de* A *rencontre la seconde tangente de* A′ *en un point* P *situé dans un plan fixe* Π.

Les tangentes au réseau plan P sont les traces des plans tangents aux surfaces (A) et (A′) sur le plan Π; si Q′ est un réseau plan orthogonal au réseau P, les deux tangentes de Q′ décrivent des congruences de Ribaucour. On sait que s'il en est ainsi, il en est de même pour tous les réseaux déduits de Q′ par l'application de la méthode de Laplace; donc si l'on considère tous les réseaux déduits de P par la transformation de Laplace, une tangente à l'un quelconque de ces réseaux décrit une congruence orthogonale à une congruence de Ribaucour; il en résulte qu'on aura une suite de surfaces, illimitée en général dans les deux sens :

(5) $$A_{-2},\quad A_{-1},\quad A_0,\quad A_1,\quad A_2\quad \ldots$$

telles que sur ces surfaces les lignes asymptotiques se correspondent et que la première tangente de l'une rencontre la seconde tangente de la suivante en un point situé dans un plan fixe Π.

La recherche de ces surfaces revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \theta.$$

II. *Trouver les surfaces* (A) *pour lesquelles le point* P *décrit un réseau* O. — On sait que les deux tangentes d'un réseau O plan décrivent des congruences orthogonales. Ici la seconde tangente du réseau P devra décrire une congruence de Ribaucour; cette congruence sera alors une congruence C. On est donc ramené à un problème connu :

Trouver les réseaux O *plans dont une congruence focale est* C.

III. *Cas où les points* P *et* Q *décrivent des réseaux* O. — On sait que si les deux réseaux focaux d'une congruence plane sont des réseaux O, il en est de même de tous les réseaux qu'on en déduit par la méthode de Laplace. Toutes les congruences focales de ces réseaux sont à la fois congruence de Ribaucour et congruence orthogonale à une autre congruence de Ribaucour. On est donc ramené à un problème connu.

Trouver toutes les congruences planes dont les réseaux focaux sont des réseaux O.

IV. *Cas où la congruence* PQ *est la projection d'une congruence de normales.* — La congruence PQ est une congruence H; il lui correspond par orthogonalité une congruence C; cette congruence C étant congruence de Ribaucour sera plusieurs fois C; donc :

Le problème revient à trouver les congruences planes qui sont plusieurs fois C *ou les réseaux plans qui sont* O *et* 3O.

V. *Cas où la congruence* PQ est C. — La congruence orthogonale à PQ sera H. Tout revient donc à trouver les congruences de normales qui sont en même temps congruences de Ribaucour; on sait que ces congruences sont parallèles aux congruences formées par les normales à une surface minima.

Dans ce cas, il existe, dans l'espace des réseaux M harmoniques à PQ et qui sont des réseaux O. Les surfaces (A) et (M) se correspondent de la façon suivante :

Aux asymptotiques de (A) *correspondent les lignes de courbures de* (M). *La première tangente de l'une de ces deux surfaces rencontre la seconde tangente de l'autre en un point situé dans un plan fixe.*

HYDRAULIQUE. — *Sur la similitude.* Note (1) de MM. C. **Camichel** et L. **Escande**.

Cette Note a pour objet l'étude de divers cas de similitude en hydraulique.

Nous avons réalisé sur cette question quatre séries d'expériences : la première, sans être nouvelle, nous a semblé intéressante à reprendre. Les trois autres sont, à notre connaissance, inédites.

1° *Écoulement par orifice circulaire en mince paroi horizontale; méridienne de la veine liquide.* — On prend deux cylindres circulaires verticaux de diamètres D et D'. Le fond de chacun d'eux est muni d'un orifice circulaire en mince paroi ayant son centre sur l'axe.

d, d' étant les diamètres des deux orifices, H et H' les hauteurs d'eau dans les deux cylindres, on a

$$\frac{D}{D'} = \frac{d}{d'} = \frac{H}{H'} = \lambda'.$$

(1) Séance du 19 novembre 1923.

La similitude géométrique des trajectoires a pour conséquence directe la similitude des surfaces limites des veines issues des deux orifices et par conséquent l'égalité des coefficients de contraction.

Nous avons vérifié directement ce fait en photographiant les méridiennes des veines liquides dans deux modèles semblables dont les dimensions sont les suivantes :

$$D = 0^m,80, \quad d = 0^m,08, \quad H = 0^m,99,$$
$$D' = 0^m,20, \quad d' = 0^m,02, \quad H' = 0^m,225.$$

Dans ces conditions, on voit facilement que les temps T et T′ nécessaires pour que le niveau de l'eau baisse de hauteurs homologues dans les deux cylindres, sont dans un rapport $\frac{T}{T'} = \sqrt{\lambda}$.

Cette propriété a été vérifiée sur trois modèles semblables.

2° *Surfaces de discontinuité. Similitude des surfaces de discontinuité dans deux modèles homologues. Vitesse sur la surface de discontinuité.* — On a produit des surfaces de discontinuité dans deux modèles semblables d'ajutages horizontaux. Le plus grand a $15^{cm} \times 3^{cm}$ de section et 40^{cm} de longueur. La charge sur le centre est de $14^{cm},3$.

Le petit modèle est semblable au grand et réduit dans le rapport $\frac{1}{3}$.

Les surfaces de discontinuité out été trouvées exactement semblables dans les deux modèles.

Les mesures de la vitesse sur la surface de discontinuité, mesures faites par une méthode antérieurement décrite par l'un de nous (¹), ont donné :

Pour le grand modèle : 2,02, 2,03, 2,04, 2,03 m. s. Moyenne : 2,03 m. s.

Pour le petit modèle : 1,18, 1,17, 1,16, 1,17 m. s. Moyenne : 1,17 m. s.

Le rapport obtenu a donc été $\frac{2,03}{1,17} = 1,734$, tout à fait voisin de $\sqrt{3}$.

3° *Billes pesantes tenues en suspension par un courant d'eau ascendant dans un tube vertical.* — Nous avons étudié, dans une autre série d'expériences, l'équilibre de billes métalliques dans un courant d'eau vertical ascendant, à l'intérieur d'un tube de verre cylindrique. M. Greze a fait, à un point de vue tout différent, des expériences sur le même sujet (²).

Si nous comparons le débit Q, correspondant à l'équilibre de la sphère de diamètre *d* dans le tube de diamètre D à celui Q′ correspondant à l'équi-

---

(¹) *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 881.

(²) *Bulletin hebdomadaire de l'Office national des Recherches scientifiques et industrielles et des Inventions.*

libre de la sphère de diamètre d' dans le tube de diamètre D′ et si nous posons

$$\frac{D}{D'} = \frac{d}{d'} = \lambda',$$

l'application de la loi de Froude donne

$$\frac{Q}{Q'} = \lambda'^{\frac{5}{2}}.$$

Pour le vérifier, on a déterminé la courbe (d, Q) ayant pour abscisses les diamètres d des sphères et pour ordonnées les débits Q correspondants pour le tube de diamètre D.

On a déterminé de même la courbe $\left(d'\lambda', Q'\lambda'^{\frac{5}{2}}\right)$ pour le tube de diamètre D′; on a constaté que cette courbe différait très peu de la courbe (d, Q) déjà obtenue.

Une vérification analogue a été faite sur un troisième tube de diamètre D″, pour lequel on avait

$$\frac{D}{D''} = \frac{d}{d''} = \lambda''.$$

Les diamètres des tubes étaient

$$D = 19^{mm},6, \qquad D' = 9^{mm},8, \qquad D'' = 6^{mm}.$$

4° *Masse d'eau comprise entre un cylindre circulaire plein immobile, et un cylindre circulaire creux de même axe, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe commun; mouvement rotationnel.* — On a placé à l'intérieur d'un cylindre creux de diamètre D_1 animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω, un cylindre plein immobile de même axe et de diamètre D_2. On a rempli l'espace compris entre les deux cylindres par de l'eau, jusqu'à une hauteur H.

On a étudié la répartition des vitesses à la surface libre et tracé la courbe (r, W) donnant la vitesse en fonction de la distance à l'axe.

On a procédé de même sur un deuxième modèle tournant à une vitesse angulaire ω', telle que $\frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\frac{1}{\lambda'}}$; ses dimensions D'_1, D'_2, H′ sont telles que l'on ait

$$\frac{D_1}{D'_1} = \frac{D_2}{D'_2} = \frac{H}{H'} = \lambda'.$$

On a construit la courbe $(r'\lambda', W'\sqrt{\lambda'})$; elle se superpose à la courbe

(r, W), ce qui vérifie la loi de Froude. La vérification a été faite avec les données suivantes :

$$D_1 = 90^{mm},5, \quad D_2 = 25^{mm}, \quad H = 82^{mm};$$
$$D'_1 = 45^{mm},25, \quad D'_2 = 12^{mm},5, \quad H' = 41^{mm},$$

soit : $\lambda' = 2$.

Conclusion. — On voit que la similitude exprimée par la loi de Froude se vérifie dans les divers cas observés.

La description complète des expériences mentionnées dans cette Note sera publiée prochainement avec tous les détails nécessaires.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Déshydratation catalytique des alcools hydroaromatiques*. Note de M. J.-B. Senderens.

I. Dans des Communications précédentes [1] j'ai indiqué comment avec l'acide sulfurique dilué et employé en très petite quantité on arrivait à déshydrater les alcools de la série grasse et à les convertir soit en oxydes, soit en carbures. La méthode s'applique aux alcools aromatiques [2] et aux alcools hydroaromatiques, tels que le cyclohexanol et les cyclohexanediols, dont il sera question dans cette Note.

II. *Cyclohexanol.* — En distillant ce cyclanol avec 3 ou 4 pour 100 d'acide sulfurique concentré, j'avais obtenu les 89 pour 100 du cyclohexène théorique [3]. Avec l'hydrate $SO^4H^2 + 3H^2O$ qui correspond à SO^4H^2 étendu de son volume d'eau le rendement s'est élevé aux 92 pour 100 de la théorie. Le mélange de cyclohexanol et de 3 pour 100 en volume de cet hydrate était chauffé dans un ballon communiquant par un réfrigérant *descendant* avec un récipient refroidi. La distillation s'est faite vers 110-145°.

Avec un réfrigérant *ascendant* l'hydrate $SO^4H^2 + 3H^2O$ n'a donné après une longue ébullition que de faibles quantités de cyclohexène, en raison sans doute de l'eau provenant de la déshydratation du cyclohexanol, laquelle, n'étant plus expulsée, augmente la dilution de $SO^4H^2 + 3H^2O$ en lui faisant perdre ses propriétés catalytiques.

(1) J.-B. Senderens, *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 813; t. 177, p. 15.

(2) Mersenheimer avait déjà montré en 1908 que l'on obtient de l'oxyde de benzyle en chauffant l'alcool benzylique avec de minimes quantités d'acide sulfurique très dilué.

(3) J.-B. Senderens, *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 1168; et *Ann. Chim.*, 9e série, t. 18, p. 117.

III. *Cyclohexanediols.* — Nous avons préparé, M. Aboulenc et moi, par réduction catalytique, sous pression, des trois diphénols, pyrocatéchine, résorcine, hydroquinone, les diols correspondants auxquels nous avons donné les noms de « pyrocatéchite » et de « résorcite » par analogie avec la quinite et qui ont comme constitution :

Pyrocatéchite.	Résorcite.	Quinite.
CH OH	CH OH	CH OH
CH^2 — CH OH	CH^2 — CH^2	CH^2 — CH^2
CH^2 — CH^2	CH^2 — CH OH	CH^2 — CH^2
CH^2	CH^2	CH OH

Si l'on considère les schémas ci-dessus, on voit que, par une déshydratation régulière, la *pyrocatéchite* donnera un seul cyclohexadiène $\Delta^{1.3}$, tandis que la *résorcite* et la *quinite* pourront donner les deux isomères $\Delta^{1.3}$ et $\Delta^{1.4}$.

J'ai tout d'abord constaté que la déshydratation se fait mal avec l'acide sulfurique concentré qui transforme les cyclohexadiènes en résines. Je me suis ensuite adressé à l'hydrate $SO^4H^2 + 3H^2O$ employé en petite quantité, 3 pour 100 par rapport au cyclohexanediol, qui a donné les résultats suivants :

IV. *Pyrocatéchite. Cyclohexadiène* $\Delta^{1.3}$. — L'action de l'hydrate

$$SO^4H^2 + 3H^2O$$

sur la pyrocatéchite est extrêmement faible. Après 2 heures d'ébullition les 80 pour 100 de la pyrocatéchite restaient inaltérés, tandis que les 20 pour 100 s'étaient deshydratés en donnant surtout des carbures condensés.

L'acide sulfurique concentré (2^g pour 100^g de pyrocatéchite) attaque au contraire énergiquement ce diol dès la température de 110°. Le produit principal est un carbure résineux qui reste dans le ballon et il distille avec l'eau un liquide dont j'ai obtenu 30^g pour 500^g de pyrocatéchite employée. Ce liquide a comme point d'ébullition 83°-84° sous la pression de 750^{mm} et sa densité $D_4^{10} = 0,8454$. Ce serait le cyclohexadiène $\Delta^{1.3}$ obtenu par Zelinsky et Gorsky en chauffant avec la quinoléine le dibromo-1.2-cyclohexane.

V. *Résorcite. Cyclohexadiène* $\Delta^{1.3}$ *avec* $\Delta^{1.4}$. — L'hydrate $SO^4H^2 + 3H^2O$ dont nous venons de signaler le peu d'activité vis-à-vis de la pyrocatéchite déshydrate au contraire avec la plus grande facilité la résorcite.

Une molécule de résorcite, soit 116^g, additionnée de 4$^{cm^3}$ de

$$SO^4H^2 + 3H^2O,$$

a commencé à bouillir vers 130° et a été maintenue ensuite à 140°-145°. Au bout de 1 heure et demie le résidu du ballon était insignifiant et l'on avait recueilli 115$^{cm^3}$ de distillat dont 32$^{cm^3}$ d'eau qui correspondaient à l'équation

$$\underset{\text{Résorcite}}{C^6H^{10}\begin{cases}OH\\OH\end{cases}} = 2H^2O + \underset{\text{Cyclohexadiène.}}{C^6H^8.}$$

Séparé de l'eau par décantation et traité ensuite par CO^3K^2 sec et puis par $CaCl^2$ fondu, le liquide a distillé de 83° à 90°. Plusieurs de ces distillats ont été réunis et ont donné par fractionnement au tube Le Bel :

	Pour 100.
83°—84°	75—$\Delta^{1,3}$
84—86	7
86—88	15—$\Delta^{1,4}$
>88	3

par où l'on voit que la réaction a fourni les deux cyclohexadiènes

```
          CH                      CH
   CH²  ⁄    ⟍ CH          CH²  ⁄    ⟍ CH
      |        |              |        |
   CH²  ⟍    ⁄ CH          CH   ⟍    ⁄ CH²
          CH                      CH
         Δ1.3                    Δ1.4
```

Mais le cyclohexadiène $\Delta^{1.3}$ est en proportion cinq fois plus grande que le $\Delta^{1.4}$. Ainsi obtenu, ce cyclohexadiène, qui a le même point d'ébullition que celui de la pyrocatéchite, a aussi sensiblement la même densité,

$$D_4^{10} = 0,8457.$$

C'est donc le cyclohexadiène $\Delta^{1.3}$.

VI. *Quinite cyclohexadiène* $\Delta^{1.4}$ *avec* $\Delta^{1.3}$. — La quinite se déshydrate tout aussi facilement que la résorcite sous l'influence de $SO^4H^2 + 3H^2O$. On obtient ainsi un liquide incolore qui distille de 84° à 90° et qui donne par fractionnement au tube Le Bel :

	Pour 100.
84°—86°	20—$\Delta^{1.3}$ et $\Delta^{1.4}$
86—87	72—$\Delta^{1.4}$
>87	8

C'est donc le cyclohexadiène $\Delta^{1.4}$ qui est obtenu en majeure partie. Il bout à 86°-87° sous la pression de 750^mm et sa densité $D_4^{10} = 0,8605$.

VII. Ainsi préparés par déshydratation directe des diols, ces cyclohexadiènes se résinifient à l'air et prennent avec l'acide sulfurique concentré les colorations observées par les auteurs qui avaient préparé ces carbures indirectement.

Harries partait des dicétones hexahydroaromatiques qu'il transformait en oximes et puis en amines dont il soumettait les phosphates à la distillation sèche (¹).

Markownikof et Fortey en faisant agir la quinoléine bouillante sur le bichlorure d'hexahydrobenzène obtenaient deux liquides qui avaient le même point d'ébullition 83°-85° et qui présentaient une très faible différence de densité, 0,8530 et 0,8463.

Il semble bien que dans tous ces cas on se trouve en présence d'un mélange de deux isomères $\Delta^{1.3}$ et $\Delta^{1.4}$ dont les constantes sont tellement voisines que ce n'est qu'en opérant sur de grandes quantités que j'ai pu réussir à les séparer.

M. L. **Lecornu** fait hommage d'un Ouvrage de M. **P. Worms de Romilly**, intitulé : *Quelques réflexions sur la Relativité*, dont il a écrit la *Préface*.

PLIS CACHETÉS.

M. **Marc Dupont** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 19 novembre 1923 et enregistré sous le n° 9277.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient une Note intitulée : *Sur un nouveau dispositif pour la réception des ondes courtes en télégraphie sans fil.*

(Renvoi à l'examen de M. Ferrié.)

CORRESPONDANCE.

MM. **Louis Breguet**, **E. Brylinski**, **Lazare Weiller** prient l'Académie de vouloir bien les compter au nombre des candidats à la place

(¹) *Ann. Chem.*, t. 328, p. 88.

vacante, dans la *Division des applications de la science à l'industrie*, par le décès de M. *Maurice Leblanc*.

M. le **Secrétaire du Conseil d'administration de la Fondation Edmond de Rothschild** prie l'Académie de vouloir bien désigner un des Membres de la Section de Physique générale qui remplacera dans ce Conseil M. *Violle*, décédé.

M. **C. Le Morvan** adresse un Rapport sur l'emploi d'une subvention accordée en 1922 sur le *Fonds Bonaparte*.

M. **Marage** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

M. le **Président de l'Académie impériale du Japon** remercie l'Académie de la profonde sympathie qu'elle lui a exprimée à l'occasion du récent tremblement de terre.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Atlas d'Algérie et de Tunisie*, par Augustin Bernard et R. de Flotte de Roquevaire. Fascicule I.

2° Jacques de Lapparent. *Leçons de Pétrographie*. (Présenté par M. Wallerant.)

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur le dernier théorème de Fermat.* Note de M. **Léon Pomey**, présentée par M. Goursat.

1. Ce célèbre théorème énonce, comme l'on sait, qu'*il est impossible de trouver pour* $n > 2$ *trois entiers différents de zéro qui satisfassent à l'équation*

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0. \tag{1}$$

Nous nous proposons de donner diverses conditions nécessaires, sans lesquelles (1) est effectivement impossible. Nous supposerons *n premier* et x_1, x_2, x_3 *premiers entre eux*, ce qui ne diminue pas la généralité du pro-

blème. Nous aurons à distinguer deux cas suivant que x_1, x_2, x_3 sont premiers à n (*premier cas* qu'on pourrait appeler *cas de S. Germain*) ou que l'un de ces nombres, soit x_1, est divisible par n (*deuxième cas*).

Les indices i, j, k étant distincts et pouvant prendre indifféremment les valeurs 1, 2, 3, rappelons qu'en vertu de (1) les quantités $x_j + x_k$, $\frac{x_j^n + x_k^n}{x_j + x_k}$, x_i et $x_1 + x_2 + x_3$ doivent être respectivement de la forme a_i^n, g_i^n, $-a_i g_i$ et $n^\nu a_1 a_2 a_3 \varphi$ dans le premier cas, et de même dans le deuxième cas sauf pour $x_2 + x_3$, $\frac{x_2^n + x_3^n}{x_2 + x_3}$ et x_1 qui doivent alors être de la forme $n^{n\nu-1} a_1^n$, $n g_1^n$, $-n^\nu a_1 g_1$ (en désignant par a_i, g_i, φ certains entiers premiers entre eux et à n et par ν un entier $\geqq 1$). Ayant retrouvé par nos propres moyens ces résultats, nous avons obtenu en outre les suivants que nous croyons nouveaux.

Premier cas :

2. Théorème I. — *Dans le premier cas, il est impossible que des entiers x^i satisfassent à (1), si les facteurs premiers des trois entiers g_i ne sont pas de la forme $1 + 2kn^\gamma$ avec $\gamma \geqq 2$, chaque g_i devant être congru à 1 (mod $2n^{\alpha_i}$) avec $\alpha_i \geqq 2$.*

Théorème II. — *Si α est le plus petit des trois exposants α_i, il faut de même que l'exposant ν soit $\geqq \alpha + 1 \geqq 3$, et que $x_1 + x_2 + x_3$ soit donc divisible par n^3 au moins.*

Théorème III. — *De même on doit avoir (pour $i = 1, 2, 3$) $x_i^n - x_i \equiv 0$ (mod $n^{\alpha+1} \geqq n^3$).*

Théorème IV. — *De même on doit avoir les trois congruences*

$$(x_i + x_j)^n - x_i^n - x_j^n \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, n^{\nu+1} \geqq n^4).$$

Remarque. — Ce théorème IV comprend en particulier la proposition analogue de Legendre qui, *prenant seulement n^2 pour module au lieu de n^4*, a été utilisée notamment par M. E. Maillet pour démontrer le cas de S. Germain quand $n = 197$.

Théorème V. — *Parallèlement aux nombres x_i, les trois entiers a_i doivent être tels que $a_1 + a_2 + a_3$ et $a_i^n - a_i$ soient divisibles par n^2, et que*

$$(a_i + a_j)^n - a_i^n - a_j^n$$

le soit par n^3.

Théorème VI. — *Le quotient de a_i par le plus grand commun diviseur de a^i et de $(a_j + a_k)$ doit avoir tous ses facteurs premiers de la forme $2Kn + 1$.*

3. *Application des théorèmes II et III.* — Voici une méthode fondée sur ces théorèmes pour s'assurer de l'impossibilité de (1) dans le premier cas :

Il suffit, comme on le voit aisément, de *vérifier que, n étant donné, il n'existe pas deux entiers consécutifs qui soient racines de la congruence*

$$x^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n^3}.$$

Exemple : Un simple coup d'œil sur la table des racines de cette congruence, que Jacobi avait fait établir pour $n \leqq 37$ et pour le module n^2 seulement (au lieu de n^3) (*Journal de Crelle*, 1828, p. 301), montre à nouveau l'impossibilité pour $n = 3, 5, 11, 17, 23, 29$.

Application du théorème IV. — Ce théorème permet de prouver également d'une nouvelle manière l'impossibilité de (1) dans le premier cas pour $n = 59$ en utilisant un résultat de M. Arwin (*Acta Math.*, 42, 1920, p. 190). Au contraire le théorème analogue mais plus restreint de Legendre (avec le module n^2 seulement) serait inefficace dans cet exemple (*loc. cit.*).

4. *Autres critères.* — En nous appuyant d'une part sur les critères que Legendre a déduits du théorème fondamental de S. Germain et, d'autre part, sur certains théorèmes que nous avons obtenus dans la théorie des nombres premiers, nous pouvons énoncer ces propositions : *L'équation* (1) *est impossible dans le premier cas dans chacune des six éventualités suivantes :* 1° *si n est de la forme* $4K+3$ *et si* $2n+1$ *divise* $2^n - 1$, 2° *si n étant de la forme* $4K+1$, $2n+1$ *divise* 2^n+1, 3° *si* $4n+1$ *est de la forme* $8K+5$ *et divise* $2^{2n}+1$, 4° *si* $4n+1$ *est de la forme* $12K+5$ *et divise* $3^{2n}+1$, 5° *si* $8n+1$ *divise* $2^{4n}-1$, 6° *si* $10n+1$ divise $5^{5n}-1$.

5. On sait que l'impossibilité de (1) dans le premier cas est prouvée pour tout exposant (premier) n tel que $2n+1$ soit premier aussi. Nous avons vérifié que les valeurs de n jouissant de cette propriété entre 9043 et 10001 sont : 9049, 9221, 9293, 9371, 9419, 9473, 9479, 9539, 9629, 9689, 9791 — et qu'entre 5000000 et 5003371, ces valeurs de n (que nous désignons simplement par leur excédent sur 5000000) sont : 111 (c'est-à-dire 5000111), 263, 321, 381, 399, 741, 783, 903, 981, 1173, 1203, 1299, 1443, 1779, 2103, 2223, 2229, 2313, 2331, 2583, 2841, 3081, 3231, enfin 3249, c'est-à-dire 5003249. Nous pensons que ces valeurs sont les plus grandes pour lesquelles un tel calcul ait été fait.

Deuxième cas :

6. Ici encore, ayant — sans le connaître — retrouvé par nos procédés un résultat dû à S. Germain, savoir que ν doit dans ce deuxième cas être $\geqq 2$, nous y avons ajouté les suivants :

Théorème. — *Dans le deuxième cas, on doit avoir, pour* $i = 2$ *et* 3,

$$x_i^n - x_i \equiv 0 \pmod{n^3}.$$

Théorème. — *Dans le deuxième cas, le théorème VI est encore vrai mais seulement pour* $i = 1$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le développement en série d'un système de fonctions analytiques.* Note [1] de M. **Nikola Obrechkoff**, présentée par M. Émile Borel.

D'après le théorème de MM. Painlevé et Hilbert, chaque fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D peut être représentée par une série de polynomes, convergeant uniformément à l'intérieur de D. Les développements de MM. Borel et Faber conduisent à rechercher des conditions générales pour la possibilité d'un tel développement. Soit D un domaine limité par une courbe simple C et $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ un système de fonctions holomorphes dans D et continues sur C. Désignons par $m(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ le minimum de la forme $\int_C |x_0 f_0(x) + \ldots + x_n f_n(x)|^2 \, ds$, où ds est l'élément de l'arc de C, les x_i étant liés par la relation $\sum |x_i|^2 = 1$. Nous démontrons le théorème assez général qui suit :

Supposons : 1° *le système* f_n *fermé, c'est-à-dire si* $f(x)$ *est holomorphe dans* D *et si* $\int_C f(x) \overline{f_\mu(x)} \, ds = 0$ *pour* $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, *il en résulte* $f(x) = 0$; 2° $m(f_0, f_1, \ldots, f_n) > \delta > 0$ *pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$; 3° *pour une courbe simple* C_1 *contenue dans* C (ou $C_1 \equiv C$), *la forme hermitienne* $\sum a_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu}$, *où* $a_{\mu\nu} = \int_{C_1} f_\mu(x) \overline{f_\nu(x)} \, ds$ *et* $\overline{\alpha}$ *est le nombre conjugué de* α, *est bornée au sens de Hilbert. Alors une fonction* $f(x)$ *holomorphe dans* D *et continue sur* C *peut être développée dans* C_1 *en une série de la forme* $\sum d_n f_n(x)$ *qui converge uniformément dans* C_1. *La série* $\sum |d_n|^2$ *est aussi convergente.*

La condition 1° peut être remplacée par la suivante. Si, par une transformation linéaire du système f_n, on obtient un système φ_n, orthogonal et normal par rapport à C, le système φ_n doit être complet.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque holomorphe dans D et continue sur C. Le système étant complet, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \int_C |f(x)|^2 \, ds, \qquad \text{où} \qquad a_\mu = \int_C f(x) \overline{\varphi_\mu(x)} \, ds,$$

[1] Séance du 26 novembre 1923.

on peut donc trouver un nombre N assez grand, tel que ε, étant une quantité aussi petite que l'on veut, on ait

$$\int_C \left| f(x) - \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu \varphi_\mu(x) \right|^2 ds = \sum_{\mu=n+1}^{\infty} |a_\mu|^2 < \varepsilon$$

pour $n > N$, ou

$$\int_C \left| f(x) - \sum_{\mu=0}^{n} d_\mu^{(n)} f_\mu(x) \right|^2 ds < \varepsilon.$$

Par un calcul classique, on en déduit

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} | d_\nu^{(n)} |^2 \leqq \frac{M'}{\delta},$$

ce qui nous montre que les séries

$$\sum | d_\nu^{(n)} |^2 \quad (d_\nu^{(n)} = 0, \ \nu > n)$$

sont convergentes et uniformément bornées pour chaque n. De la relation

$$\int_C \left| \sum_{\nu=0}^{n} (d_\nu^{(n)} - d_\nu^{(m)}) f_\nu(x) \right|^2 ds = \int_C \left| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) \right|^2 ds = \sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu|^2 < 2\varepsilon$$

pour $m \geqq n > N$ on obtient de même

$$(2) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} | d_\mu^{(n)} - d_\mu^{(m)} |^2 < \frac{2\varepsilon}{\delta}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{n, m = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} | d_\nu^{(n)} - d_\nu^{(m)} |^2 = 0.$$

De (1) et (2), d'après un théorème de Schmidt [1], il suit que $d_\nu^{(n)}$ tend vers d_ν ainsi que $\lim_{n=\infty} \sum | d_\nu^{(n)} - d_\mu |^2 = 0$. Désignons par Δ la plus courte distance entre C et C_1 et par L_1 la longueur de C_1. D'après la formule fondamentale de Cauchy, si y est sur C_1, on a

$$\left| f(y) - \sum_{\mu=0}^{n} d_\mu^{(n)} f_\mu(y) \right|^2 = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left[f(x) - \sum_{\mu=0}^{n} d_\mu^{(n)} f_\mu(x) \right]^2}{x - y} dx \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta};$$

$$\int_{C_1} \left| f(y) - \sum_{\mu=0}^{n} d_\mu^{(n)} f_\mu(y) \right|^2 ds < \frac{\varepsilon L_1}{2\pi\Delta}.$$

---

(1) SCHMIDT, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. 25, 1908, p. 53-77. — FRÉCHET, *Comptes rendus*, 24 juin 1907.

Mais

$$\int_{C_1}\left|f(y)-\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu f_\nu(y)\right|^2 ds$$

$$\leqq 2\int_{C_1}\left|f(y)-\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu^{(n)} f_\nu(y)\right|^2 ds + 2\int_{C_1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}(d_\nu^{(n)}-d_\nu) f_\nu(y)\right|^2 ds.$$

Dans le second membre la première intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En vertu de la supposition que la forme $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu}$ est bornée, on a

$$\int_{C_1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}(d_\nu^{(n)}-d_\nu) f_\nu(x)\right|^2 ds = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(d_\mu^{(n)}-d_\mu)\left(\overline{d_\nu^{(n)}}-\overline{d_\nu}\right) \leqq K\sum_{\nu=0}^{n} |d_\nu^{(n)}-d_\nu|^2,$$

la seconde intégrale tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par une méthode connue [1] on démontre que dans C_1 on a $f(x)=\sum d_n f_n(x)$ et la série converge uniformément, la série $\sum |d_n|^2$ est aussi convergente. On peut facilement démontrer la proposition que si un système est fermé, il est aussi complet, en suivant une méthode analogue à la méthode donnée par M. Riesz [2] au cas des fonctions réelles. Une autre démonstration de la même proposition s'obtient en considérant la fonction

$$U_n(a, x) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \overline{\varphi_\nu(a)}\,\varphi_\nu(x)}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |\varphi_\nu(a)|^2}}.$$

Si a est dans C et δ_a la plus courte distance entre a et C, on aura

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\varphi_\nu(a)|^2 = [U_n(a, a)]^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{[U_n(a, x)]^2}{x-a}\,dx \leqq \frac{1}{2\pi\delta}\int_C |U_n(a, x)|^2\,ds = \frac{1}{2\pi\delta_a},$$

la série $\sum |\varphi_\nu(x)|^2$ est donc convergente; de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on conclut que si $\sum |c_\nu|^2$ est convergente la série $M(x)=\sum |c_n\varphi_n(x)|^2$ est aussi convergente pour x dans C.

---

(1) Montel, *Leçons sur les séries de polynomes, etc.*, Paris, 1910, p. 17.
(2) F. Riesz, *Comptes rendus*, t. 144, 1907, p. 734.

ALGÈBRE. — *Sur un nouveau théorème d'Algèbre.*
Note de M. **Miécislas Biernacki**, présentée par M. Henri Lebesgue.

Dans son intéressant Mémoire *Sur les modules des zéros des polynomes* (¹), M. Montel a démontré (parmi beaucoup d'autres) le théorème suivant :

Le polynome à $(k+1)$ termes

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1})$$

a toujours p zéros dont le module est moindre qu'un nombre fixe $\varphi_p(k)$ qui ne dépend que du nombre $(k+1)$ des termes de ce polynome; il a montré que $\varphi_p(k) = \sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$ pour $p=1$ et $p=2$ et il a ajouté que, probablement, ce nombre $\varphi_p(k)$ est égal à $\sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$.

M. Walsh a remarqué ultérieurement (²) que le nombre $\varphi_p(k)$ est moindre qu'un nombre $\mu(k)$ ne dépendant que de k.

Une étude d'un caractère algébrique m'a permis de confirmer pleinement et de préciser les prévisions de M. Montel. J'ai établi notamment les propositions suivantes :

I. *L'équation*

$$1 + x^p + a x^n = 0 \qquad (p < n)$$

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas le nombre $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$. *Cette limite n'est atteinte que pour les p équations suivantes :*

$$(1) \qquad 1 + x^p + \varpi^{-n} p n^{-\frac{n}{p}} (n-p)^{\frac{n}{p}-1} x^n = 0,$$

où ϖ désigne une racine $p^{\text{ième}}$ de -1.

L'équation (1) a une racine double $x = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}\,\varpi$ et $(p-1)$ racines de module moindre que $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$.

II. Plus généralement :

L'équation à $(k+1)$ termes

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0 \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1})$$

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. 40, 1923, p. 1-34.

(²) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1209.

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas le nombre

$$(2)\qquad \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\,\frac{n_2}{n_2-p}\cdots\frac{n_{k-1}}{n_{k-1}-p}}.$$

Si l'on considère les degrés n_i comme arbitraires, l'exposant p et le nombre de termes $k+1$ seuls étant fixés, *la limite supérieure de l'expression* (2) *qui, dans ces conditions, est égale à* $\sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$, *n'est atteinte que pour les p équations suivantes :*

$$(3)\qquad \left(1-\frac{x}{\varpi\varphi}\right)^k\left[1+C^1_k\frac{x}{\varpi\varphi}+C^2_{k+1}\frac{x^2}{\varpi^2\varphi^2}+\ldots+C^s_{k+s-1}\frac{x^s}{\varpi^s\varphi^s}+\ldots+C^{p-1}_{k+p-2}\frac{x^{p-1}}{\varpi^{p-1}\varphi^{p-1}}\right]=0,$$

où j'ai posé $\varphi=\sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$ et où ϖ désigne une racine $p^{\text{ième}}$ de -1. Le polynome entre crochets a, en vertu du théorème de M. Kakeya, tous ses zéros *moindres* en module que $\sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$.

Si l'on fait, dans (3), $p=1$ ou $p=2$, on retrouve les expressions données par M. Montel [1]. Ainsi, le nombre $\mu(k)$ de M. Walsh est égal à k.

Si l'on considère les degrés n_i comme fixes, la limite (2) n'est pas nécessairement atteinte dans tous les cas. Il suffit, pour le voir, de se rappeler cet autre énoncé de M. Montel [2] :

L'équation

$$1+x^p+a_1x^{p+q}+a_2x^{p+2q}+\ldots+a_{k-1}x^{p+(k-1)q}=0$$

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas un nombre fixe indépendant de q et du nombre des termes du polynome, lorsque q ne divise pas p.

Je remarque pour terminer que le théorème II permet de formuler un énoncé ressemblant un peu à celui qui vient d'être cité :

L'équation

$$1+x^p+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\ldots+a_{k-1}x^{n_{k-1}}=0\qquad (p<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}),$$

où la somme des inverses des degrés est assujettie à ne pas dépasser un nombre fixe C, *a toujours p racines dont le module ne dépasse pas un nombre fixe, qui ne dépend que de l'exposant p et de* C *et non du nombre des termes du polynome.*

---

(1) Mémoire cité, p. 3 et 13.

(2) Mémoire cité, p. 24.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* Note de Mlle **Nina Bary**, présentée par M. Henri Lebesgue.

Le problème de l'unicité du développement trigonométrique appelle l'attention sur les « ensembles (U) » jouissant de la propriété suivante : Si une série

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x+b_n \sin n x$$

converge vers zéro partout, sauf peut-être aux points d'un tel ensemble, tous les coefficients a_n et b_n de cette série sont nuls. Nous appellerons « ensembles (M) » ceux qui ne jouissent pas de cette propriété. En vertu d'un résultat connu de M. W.-H. Young *tout* ensemble *dénombrable* est un ensemble (U). D'autre part, en 1916, M. Menchoff a démontré l'existence d'un ensemble (M) parfait *de mesure nulle.* Ce résultat impliquait la question : Existe-t-il des ensembles (U) ayant la puissance du continu? En 1921, M. Rajchman (1) et moi avons donné indépendamment et presque en même temps une réponse *affirmative* à cette question. M. Rajchman a construit une classe d'ensembles parfaits (U), qu'il appelle « ensembles du type (H) ». La question se pose naturellement de savoir s'il existe des ensembles parfaits (U) qui ne sont pas du type (H) et quels sont les ensembles (U) non parfaits.

Dans une Note récente (2) M. Zygmund a énoncé le résultat très général suivant : La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (U) est un ensemble (U) (3). M. Zygmund a indiqué qu'une forme particulière de ce théorème, celle où les ensembles (U) sont du type (H), avait été obtenue antérieurement par moi. La méthode que j'avais suivie m'a conduit depuis à un résultat plus général que le théorème cité par M. Zygmund : *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés* (U) *est un ensemble* (U).

Voici les considérations qui m'ont conduit à ce résultat :

Soit E un ensemble (M). Toute série trigonométrique à coefficients non nuls qui converge vers zéro en dehors de E sera dite une *série associée* à E.

---

(1) *Fund. Math.*, vol. 3 et 4.

(2) *Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 576.

(3) Il s'agit sans doute d'ensembles (U) mesurables; pour les ensembles (U) non mesurables l'énoncé de M. Zygmund serait inexact.

Afin d'exclure un cas trivial, nous ne considérerons que les ensembles (M) de mesure nulle.

Soit une série trigonométrique convergente vers zéro *presque partout*, mais non *pas partout*. Les coefficients a_n et b_n de cette série tendent nécessairement vers zéro. Nous appellerons *noyau simple* N_s de cette série l'ensemble des points où elle ne converge pas vers zéro; le *noyau réduit* sera l'ensemble de tous les points x pour lesquels les sommes partielles $S_n(x)$ sont non bornées $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Le noyau réduit N_r a une propriété descriptive importante : *Si* N_r *est partout dense sur un ensemble parfait* P, *son complémentaire par rapport à* P *est de première catégorie sur* P. En effet, soit, pour chaque x, $f_n(x)$ le plus grand des nombres $|s_1(x)|, |s_2(x)|, \ldots, |s_n(x)|$. Il est évident que la fonction $f_n(x)$ est continue et la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ croissante. Sa limite $f(x)$ est une fonction de classe 1 de la classification de M. Baire et il est évident que le noyau réduit N_r est l'ensemble des points où l'on a $f(x) = +\infty$. D'un théorème bien connu de M. Baire, on déduit de suite la propriété annoncée.

Servons-nous maintenant d'un lemme de M. Rajchman dans une forme un peu généralisée. Considérons deux séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Nous dirons que la série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos nx + l_n \sin nx$$

dont les coefficients sont définis par les formules

$$k_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} - b_p \beta_{n-p}, \qquad l_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \beta_{n-p} + b_p \alpha_{n-p}$$

est le *produit formel* des séries proposées que nous appellerons *facteurs formels*. Dans l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$; $\lim_{n\to\infty} n^3 \alpha_n = \lim_{n\to\infty} n^3 \beta_n$, on a la proposition :

LEMME GÉNÉRALISÉ DE M. RAJCHMAN. — *Si l'un des facteurs formels converge vers zéro en un point* x_0, *le produit formel converge vers zéro en ce point; si les limites d'indétermination des sommes partielles* $s_n(x)$ *de la première*

série sont $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} s_n(x_0)$ *et* $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x_0)$ *les limites d'indétermination du produit formel sont* $\lambda(x_0)\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} s_n(x_0)$ *et* $\lambda(x_0)\lim s_n(x_0)$, $\lambda(x)$ *étant la somme de la seconde série.*

Soient δ un intervalle quelconque sur $[0, 2\pi]$, x_0 un point du noyau simple N_s appartenant à δ. Soit $\lambda(x)$ une fonction positive sur δ, nulle en dehors et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres. Soit la série en α_n et β_n sa série de Fourier. Dans ces conditions, d'après le lemme cité, le produit formel converge vers zéro en dehors de δ et dans δ, sauf aux points de N_s, mais ne converge pas vers zéro au point x_0. Donc la série produit est une série à coefficients non nuls. Il est évident que le noyau simple N'_s et le noyau réduit N' de la série produit coïncident avec les portions du noyau simple N_s et du noyau réduit N_r de la série en a_n et b_n situés dans l'intervalle δ. En désignant par $\sigma_n(x)$ les sommes partielles de la série produit, on a nécessairement, pour un ensemble non dénombrable de points : $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sigma_n(x) = +\infty$; en effet, dans le cas contraire, en vertu d'un théorème connu de M. Ch. de la Vallée Poussin, la série produit serait de Fourier-Lebesgue et par conséquent tous les coefficients de cette série seraient nuls. Donc, *tout intervalle* δ *contenant un point du noyau simple* N_s *contient nécessairement un ensemble non dénombrable de points du noyau réduit* N_r. Ainsi *le noyau réduit* N_r *est un ensemble sans points isolés, partout dense et non dénombrable sur le noyau simple* N_s.

Cela posé, on démontre aisément que *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés* (U) *est un ensemble* (U). Soit en effet $E = \sum F_k$, F_k étant un ensemble fermé (U). Si E était un ensemble (M), le noyau réduit N_r d'une série associée à E serait de deuxième catégorie sur l'ensemble parfait $P = N_r + N'_r$, N'_r étant le dérivé de N_r. La série converge vers zéro en dehors de P ; N_r est contenu dans E ; donc l'un au moins des ensembles F_k n'est pas de première catégorie sur P. Il existe donc un intervalle δ tel que la portion de l'ensemble parfait P située sur δ appartient à F_k. Mais cette portion est évidemment un ensemble (M), donc F_k est un ensemble (M) contrairement à l'hypothèse.

Ce théorème permet de construire *des ensembles parfaits* (U) *qui ne sont pas du type* (H) *et des ensembles* (U) *ayant la puissance du continu dans tout intervalle quelque petit qu'il soit.*

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE. — *Sur les mouvements infiniment petits en un point d'un corps élastique de l'espace.* Note de M. **David Wolkowitsch**, présentée par M. d'Ocagne.

L'objet de la présente Note est de généraliser pour un système élastique quelconque de l'espace les résultats précédemment exposés [1] pour tout système élastique admettant un plan de symétrie.

I. Toute force de l'espace, F, produit, au point du système où elle s'exerce, une viration. Les vecteurs translation et rotation correspondants déterminent un complexe linéaire de droites de moment nul.

Si ce complexe est spécial, la force F produit une rotation unique R et est dite *monogyre*.

L'axe du complexe spécial, support de la rotation R produite par une force unique, est dit *monodyne*.

II. Les complexes linéaires correspondants aux forces passant par un point fixe M et contenues dans un même plan P ont pour équation

$$\Phi_F = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y = 0,$$

$\Phi_x = 0$ et $\Phi_y = 0$ désignant les complexes correspondant à deux droites arbitraires fixes M_x, M_y, suivant lesquelles une force quelconque F du faisceau a pour composantes α et β.

Il passe donc par le point M deux droites monogyres contenues dans le plan P; elles correspondent aux deux complexes spéciaux du faisceau. Le complexe des droites *monogyres* est donc du second ordre.

L'analogie des vecteurs forces et des vecteurs rotations permet de dire que le complexe des droites *monodynes* est aussi lui du second ordre.

III. Une force quelconque F_1 du plan P admet trois composantes α, β, γ dirigées suivant les trois côtés du triangle M_x, M_y et Z (Z étant une troisième droite fixe du plan P dont le complexe linéaire correspondant est $\Phi_z = 0$).

Le complexe linéaire correspondant à la force F_1 a une équation de la forme

$$\Phi_{F_1} = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z = 0$$

définissant un réseau; les axes des complexes spéciaux de ce réseau forment

---

[1] *Comptes rendus*, 8 janvier 1923.

une semi-quadrique dont chaque génératrice correspond à une droite monogyre du plan P. La quadrique est dite *adjointe* au plan P.

IV. Les génératrices rectilignes de cette quadrique, appartenant à la semi-quadrique complémentaire, sont des droites monogyres correspondant aux droites monodynes contenues dans le plan P.

V. Les droites à la fois monogyres et monodynes forment une congruence du quatrième degré et du quatrième ordre.

La quadrique adjointe à un plan quelconque est tangente aux plans déterminés par les quatre groupes de droites monodynes et de droites monogyres F_1R_1, F_2R_2, F_3R_3, F_4R_4 correspondant à chacune des droites de la congruence $D_{1,2,3,4}$ contenues dans le plan considéré.

La quadrique adjointe au plan P_1, des deux droites F_1, R_1, admet la droite D_1 pour génératrice commune aux deux semi-quadriques; cette quadrique ne peut être qu'un cône, mais alors toute droite passant par le sommet de ce cône I_1 est à la fois monogyre et monodyne; le point I_1 est un point principal.

Le raisonnement déjà fait pour le système à plan de symétrie montre qu'il existe dans le plan P_1 trois autres points principaux I_2, I_3, I_4 anticonjugués par rapport à deux coniques.

Il ne peut y avoir d'autres points principaux puisque par un point de l'espace passent quatre droites de la congruence et quatre seulement.

Le plan P_1 est tel que toute droite contenue dans ce plan est à la fois monogyre et monodyne; les faces du tétraèdre des quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 jouissent elles-mêmes d'une propriété identique et le fait que la congruence est de la quatrième classe implique que le plan P_1 est confondu avec une face de ce tétraèdre.

Le complexe des droites monogyres est dont tétraédral, celui des droites monodynes également, les deux complexes admettent le même tétraèdre principal.

HYDRODYNAMIQUE. — *Oscillations au voisinage du lieu d'émersion d'un solide dans le cas des ondes par émersion en milieu indéfini.* Note de M. R. **Risser**, présentée par M. L. Lecornu.

Si le mouvement des particules fluides situées à la surface et assez loin de la zone d'émersion a été étudié en détail dans le cas d'un milieu indéfini, celui des particules voisines du lieu d'émersion ne l'a pas été en faisant état

des valeurs de la dénivellation données par Poisson, Cauchy et M. Boussinesq.

Rappelons à cet égard que l'on peut passer des formules de M. Boussinesq à celles de Poisson et Cauchy et faisons observer avec M. Hadamard ([1]) que la solution de M. Boussinesq, et celle résultant de l'intégration d'une certaine équation intégro-différentielle qui caractérise le mouvement des ondes, sont équivalentes dans le cas à l'étude.

On sait que si l'on désigne par φ le potentiel des vitesses et par $F(x, y)$ les petites ordonnées primitivement connues de la surface, les équations relatives au problème des ondes par émersion dans un milieu indéfini à trois dimensions sont les suivantes :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

avec les conditions

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi = 0, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = F(x, y), \quad \text{pour } t = 0, \\ \varphi = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial (x, y, z, t)} = 0 & (\text{pour } t,\ x,\ y \text{ ou } z \text{ très grands}). \end{array}\right. \tag{3}$$

L'examen du potentiel des vitesses de Poisson ([2]), où l'on fait $g = 1$

$$\varphi = -\frac{t}{\pi^2} \int\int_{-\infty}^{-\infty} \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{t^2}{3!}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{t^4}{5!}\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} \cdots\right) F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

avec

$$Z = \frac{\pi}{2\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

montre que la série entre parenthèses sous le signe $\int\int$ sera d'autant plus convergente que le rapport $\dfrac{t^2}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$ sera plus petit, et que cette série sera en défaut quelque petit que soit le temps t, si l'on considère un point de la surface fluide pris dans l'étendue de l'ébranlement primitif. Il y a donc lieu de chercher ce qui se passe en réalité aux points de la surface dont les coordonnées x, y sont respectivement comparables à ξ et η.

([1]) Voir sa Communication du 21 mars 1910.

([2]) Voir page 144 de son mémoire sur la théorie des ondes.

Nous guidant sur la méthode préconisée par M. Boussinesq dans le cas de deux dimensions (cylindre immergé dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe du canal), nous adoptons pour expression de la dénivellation

$$(4)\qquad A = \frac{4}{\pi^2 t}\frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2\cos\mu}{4r}\right)^{\frac{3}{2}} \psi'\left(\frac{t^2\cos\mu}{4r}\right) \times F(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, dr \quad (^1),$$

où F n'est autre que la fonction apparaissant dans le groupe de conditions (3) et où ψ est définie par

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2)\, d\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sin\gamma - \cos\gamma) + \int_0^{\infty} e^{-2m\sqrt{\gamma}} \cos m^2\, dm.$$

Nous remplacerons le corps par son paraboloïde osculateur, et substituerons alors $H\left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right]$ à $F(x, y)$.

Dans l'expression de la dénivellation qui peut s'écrire

$$(5)\qquad h = \frac{4}{\pi^2 t}\frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2\cos\mu}{4r}\right)^{\frac{3}{2}} \psi'\left(\frac{t^2\cos\mu}{4r}\right) \times F(x \pm r\cos\theta, y \pm r\sin\theta)\, dr,$$

la fonction F n'a de valeur que si

$$-a < x \pm r\cos\theta < a, \qquad -b < y \pm r\sin\theta < b.$$

Nous n'étudierons ici que le cas $x < a$, $y < b$, et remarquerons qu'en la circonstance

$$h = \frac{4}{\pi^2 t}\frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\sum \int_0^{r'_i}\right) \qquad \text{avec } (i = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$r'_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}, \qquad r'_2 = \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2},$$
$$r'_3 = \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2}, \qquad r'_4 = \sqrt{(a+x)^2 - (b+y)^2}.$$

Les fonctions F, entrant dans les deux premiers éléments de Σ, sont respectivement

$$F(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) \quad \text{et} \quad F(x - r\cos\theta, y + r\sin\theta),$$

et celles entrant dans les autres sont

$$F(x + r\cos\theta, y - r\sin\theta) \quad \text{et} \quad F(x - r\cos\theta, y - r\sin\theta).$$

(1) Voir formule (238), page 644, *Traité des potentiels* de M. Boussinesq.

Si l'on s'en tient à une première approximation et si l'on prend pour valeur approchée de F

$$(\mathrm{F}) = \frac{\text{volume du corps immergé}}{\pi ab},$$

on voit que, dans le cas envisagé, on a

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\pi t}(\mathrm{F})\frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos\mu \, d\mu \left(\sum \int_{\alpha_i}^{\infty}\right),$$

avec

$$\alpha_i^2 = \frac{t^2 \cos\mu}{2 r_i} \qquad \text{et} \qquad \int_{\alpha_i}^{\infty} = \int_{\alpha_i}^{\infty} \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha.$$

Comme les α_i sont des nombres positifs considérables, on peut, ainsi que l'a fait M. Boussinesq, substituer $-\frac{1}{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$ à $\int_{\alpha}^{\infty}$, et, par suite, donner à h une forme relativement simple.

Si l'on prend le point (x, y) extrêmement près du centre de la section à fleur d'eau, les longueurs r'_i ont pour valeur principale $\mathfrak{R} = \sqrt{a^2 + b^2}$, et tous les α_i peuvent être assimilés à $\frac{t\sqrt{\cos\mu}}{\sqrt{2\mathfrak{R}}}$; on voit alors que

$$h = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\pi}}\frac{(\mathrm{F})}{t}\frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{\cos\mu}\,\sin\left(\frac{t^2\cos\mu}{4\mathfrak{R}} - \frac{\pi}{4}\right) d\mu.$$

On détermine par un procédé identique la valeur de la dénivellation dans le cas correspondant respectivement à

$$(x > a, y > b), \quad (x > a, y < b) \quad \text{et} \quad (x < a, y > b).$$

AVIATION. — *Méthode graphique pour l'adaptation des hélices aux avions.* Note (¹) de M. **Delanghe**, présentée par M. Rateau.

Un planeur étant muni de M moteurs identiques placés en parallèle, nous nous proposons de déterminer parmi les hélices d'une famille à un seul paramètre h, celle qui fournit la puissance effective maximum à une altitude Z donnée sur une trajectoire rectiligne de pente donnée.

Pour chaque vitesse d'avancement v d'un groupe motopropulseur déter-

(¹) Séance du 26 novembre 1923.

miné, à l'altitude Z, on peut calculer la valeur du rendement ρ et du nombre de tours unitaire n de l'hélice ainsi que la puissance W_z du moteur. Les résultats expérimentaux obtenus avec les familles d'hélices et les moteurs montrent que la puissance effective ρW_z d'un groupe motopropulseur n'atteint son maximum maximorum, pour une vitesse donnée, que si l'hélice permet au moteur de tourner au régime maximum admissible. Dès lors, la puissance W_{zm} du moteur et le nombre de tours unitaire n_m de l'hélice qui correspondent à l'adaptation optimum se trouvent connus.

Soient alors a_z le poids spécifique de l'air à l'altitude Z, β le coefficient de puissance et D le diamètre de l'hélice; on a

$$W_{zm} = \frac{a_z}{g} \beta n_m^3 D^5, \tag{1}$$

ou, si l'on désigne par χ l'expression $\frac{\beta}{\gamma^5}$, dans laquelle $\gamma = \frac{v}{nD}$,

$$\chi = \frac{W_{zm} n_m^2}{\frac{a_z}{g} v^5}. \tag{2}$$

Considérons l'enveloppe

$$\Phi(\chi, \rho) = 0 \tag{3}$$

des courbes de rendement $\rho = f(\gamma, h)$ de la famille d'hélices. Il est possible de tracer également une courbe

$$\Psi(\chi, \rho) = 0 \tag{4}$$

relative au planeur en mouvement sur une trajectoire de pente quelconque. En effet, les deux équations de portance et de résistance permettent de calculer pour chaque valeur de la vitesse v, la puissance W_u absorbée par l'avion et par suite :

1° Le coefficient $X = \frac{W_{zm} n_m^2}{\frac{a}{g} v^5}$ qui en l'espèce ne dépend que de v;

2° Le rendement nécessaire $\rho = \frac{W_u}{M W_{zm}}$.

Les points d'intersection de l'enveloppe Φ et de la courbe Ψ déterminent les valeurs de χ, γ, v, D, h cherchées.

Extension au cas d'un tandem de deux hélices. — D'après le théorème de Froude, la vitesse relative v' du souffle de l'hélice avant est liée à la trac-

tion T par la relation

$$\left(\frac{v'}{v}\right)^2 = 1 + \frac{T}{\frac{a_z}{2g}\frac{\pi D^2}{4}v^2}, \tag{5}$$

ou

$$\left(\frac{v'}{v}\right)^2 = 1 + \frac{8}{\pi}\frac{\alpha}{\gamma^2} \qquad \left(\alpha = \frac{T}{\frac{a_z}{2g}n^2 D^4}\right). \tag{6}$$

L'hélice arrière, supposée en entier dans le souffle de l'hélice avant, exerce une traction T′ et absorbe une puissance W'_z. Son rendement aérodynamique est, par définition,

$$\rho' = \frac{T' v'}{W'_z}; \tag{7}$$

mais son rendement effectif sur l'avion est

$$\rho'_{\text{eff.}} = \frac{T' v}{W'_z} = \rho' \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8}{\pi}\frac{\alpha}{\gamma^2}}}. \tag{8}$$

Le rendement de l'ensemble du tandem a donc pour expression

$$\rho_g = \frac{\rho W_z + \rho'_{\text{eff.}} W'_z}{W_z + W'_z}. \tag{9}$$

Pour chaque valeur de v, il est possible de calculer le coefficient

$$\chi = \frac{W_{zm} n_m^2}{\frac{\alpha_z}{g} v^5},$$

par suite γ, h, α d'après l'enveloppe (3), v' d'après l'équation (6) et le coefficient

$$\chi' = \frac{W'_{zm} n'^2_m}{\frac{a_z}{g} v'^5}$$

relatif à l'hélice arrière. On en déduit, d'après l'enveloppe (3), les valeurs ρ et ρ' correspondantes.

On calcule d'autre part le rendement nécessaire pour le planeur,

$$\rho = \frac{W_u}{W_{zm} + W'_{zm}},$$

en fonction de la vitesse v d'avancement.

L'intersection des courbes $\Phi_1(\rho_g, v) = 0$, $\Psi_1(\rho, v) = 0$ fournit v, par suite χ, h, γ, v', h', γ' et l'adaptation des hélices.

Remarque. — Si les deux hélices ne sont pas de la même famille, il faut recourir aux deux enveloppes correspondantes.

Généralisation. — Si l'avion est muni de M groupes motopropulseurs dissemblables, il suffit encore de considérer l'intersection de la courbe $\Phi_1(\rho, v) = 0$ relative au planeur avec la courbe $\Psi_1(\rho_g, v) = 0$, ρ_g étant le rendement de l'ensemble des M groupes

$$\rho_g = \frac{\Sigma_1^M \rho W_{zm}}{\Sigma_1^M W_{zm}}.$$

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Comparaison de plusieurs radiations émises par le noyau des comètes, et d'origine encore inconnue, avec le spectre du bec Mecker.* Note de M. F. **Baldet**, présentée par M. H. Deslandres.

I. Les photographies spectrales de la plupart des comètes montrent une série de lignes brillantes, plus ou moins nettes, très courtes, émises uniquement par les gaz qui se trouvent en contact immédiat avec le noyau. Les épreuves obtenues au prisme-objectif donnent de fines images monochromatiques parmi lesquelles certaines sont piquées comme des images stellaires. Les plus intenses sont groupées entre λ 400 et λ 410; un petit groupe plus faible se trouve autour de λ 431; les autres, très faibles, sont dispersées dans tout le spectre. Avec M. A. de la Baume Pluvinel [1], nous en avons mesuré 47 dans la comète Brooks (1911 *c*) qui fut, à cet égard, une des plus remarquables. L'origine de ce spectre, particulier aux noyaux des comètes, est entièrement inconnue; aucune identification avec les nombreux spectres terrestres n'a pu être établie jusqu'à présent.

On le retrouve dans dix-huit comètes observées depuis 1881. Le tableau ci-après donne, pour la première fois, les longueurs d'ondes moyennes de toutes les radiations mesurées dans le groupe caractéristique 400-410. Pour l'établir, j'ai choisi les observations concordantes faites sur les neuf comètes suivantes : Rordame-Quénisset (1893 *b*), Gale (1894 *b*), Swift (1899 *a*), Borelly (1913 *c*), Daniel (1907 *b*), Halley (1909 *c*), Brooks (1911 *c*), Zlatinsky (1914 *b*), Mellish (1915 *a*), obtenues avec des spectrographes à fente, tous à un prisme et de dispersions comparables. Les quelques reproductions des photographies des spectres accompagnant les

---

(1) *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 1286.

mémoires, ainsi que les clichés originaux des collections de M. de la Baume Pluvinel et de l'Observatoire de Meudon, montrent que le groupe caractéristique a toujours présenté le même aspect dans les différentes comètes.

Bec Mecker. Raffety.	Bec Mecker. Baldet. Int.	Bec Mecker. Baldet. λ.	Comètes. Int.	Comètes. λ.	Comètes. N [1].
4108	1	4110	1	4109	2
			1	4099,7	5
4095,3	2	4095,0			
4084,8	2	4085,0	1	4086	2
4074,0	3	4075,5	3	4073,9	7
4066,0	5	4067,1	3	4066,3	5
4060,7	4	4058,6	Intervalle sombre		
4053,0 / 4047,8	4	4050,0	5	4051,7	9
4043,2	2	4043	3	4042,9	6
4040,0	2	4039	3	4039,6	3
4037,0	2	4035,0			
4031,3			1	4032,5	2
4025,2	3	4026,5			
			2	4019,6	5 [2]
			1	4013,5	6
			1	4002,0	5 [2]
			1	3992,8	3
			1	3987,9	7

II. En étudiant le spectre de Swan donné par la flamme du bec Mecker, M. Raffety a découvert en 1916 [3] une série de très faibles raies (ou bandes) entre λ 402 et λ 410, précisément dans la région du groupe caractéristique du noyau. Je les ai obtenues également à l'Observatoire de Meudon, en suivant la technique de l'auteur, mais en employant une dispersion moindre pour faciliter la comparaison avec les spectres cométaires. On trouvera les mesures de M. Raffety et les miennes en regard des longueurs d'ondes du spectre à identifier.

L'examen du tableau montre que, dans la limite de précision des mesures, qui dépasse à peine l'angström, il y a concordance entre les spectres comé-

---

[1] Nombre de comètes dans lesquelles ces radiations ont été observées.

[2] Ces deux radiations ne doivent pas être confondues avec celles du doublet : 4020,4 — 4001,3 du spectre de Fowler (CO à basse pression).

[3] *Philosophical Magazine*, t. 32, 1916, p. 555.

taire et terrestre. De plus, elle a lieu avec des radiations trouvées dans la flamme des hydrocarbures dont les principales (spectre de Swan) ont été observées, comme on le sait, dans toutes les comètes. Il serait cependant prématuré de conclure à l'identification des deux spectres à cause des lacunes qu'ils présentent de part et d'autre. L'analogie est néanmoins assez étroite et méritait d'être signalée.

ASTRONOMIE. — *L'univers sidéral et la théorie de la relativité.* Note de M. E.-M. **Lémeray**, présentée par M. L. Lecornu.

La vue immédiate du ciel montre que la Voie lactée se compose, dans une grande partie de son cours, de deux branches plus ou moins nettes, tantôt réunies par des ponts, tantôt assez éloignées et diffuses.

Quant aux nébuleuses, l'examen télescopique montre qu'à l'inverse des étoiles, elles ont une concentration marquée vers les pôles galactiques.

La Voie lactée est-elle un amas à peu près lenticulaire comme la plupart des astronomes le pensent? Dans ce cas, le Soleil serait voisin du centre et la concentration polaire apparente des nébuleuses serait due à une légère opacité du milieu dont le maximum se trouverait dans l'amas galactique.

Si, avec d'autres observateurs, on admet que la Voie lactée n'est pas un amas comme les autres, mais est immensément grande au point d'englober l'univers entier, étoiles et nébuleuses, on peut se proposer de trouver une tout autre explication.

Dans une Note précédente ([1]) nous avons montré que la Voie lactée pouvait être une simple apparence due à la courbure des rayons lumineux, d'après la théorie de la relativité.

Comme grossière approximation, nous avons considéré le cas d'une densité moyenne uniforme et obtenu la répartition suivante pour l'observateur effectif :

$$\gamma = \frac{2}{3} a^3 \frac{s^2\sqrt{2-s^2}\left[(2-s^2)^2 + s^4 \operatorname{tang}^2\psi\right]\left[1+\operatorname{tang}^2\psi\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[2-s^2+s^2\operatorname{tang}^2\psi\right]^2\sqrt{2-s^2+s^4\operatorname{tang}^2\psi}},$$

s est un paramètre définissant la position de l'observateur par rapport au centre; ψ, un angle *mesuré* par le même observateur; γ est, non pas l'intensité bien entendu, mais le nombre relatif d'étoiles par unité d'angle solide

([1]) *Comptes rendus*, 10 juillet 1922.

et dans une direction faisant l'angle ψ avec la direction centre-observateur.

Les recherches poursuivies depuis notre première Communication nous ont conduit aux résultats suivants :

La courbe de répartition, construite pour le cas de $s = 0,5$ par exemple, en prenant des coordonnées rectangulaires ψ et γ, a la forme d'un *M* italique; elle présente deux maxima et trois minima; elle est symétrique par rapport à l'ordonnée centrale $\psi = 0$ (plan galactique moyen); les deux minima, pour $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, sont très inférieurs au minimum central; ils correspondent aux pôles galactiques; les deux maxima sont d'autant plus accentués et rapprochés que s est plus petit.

Dans cette théorie, ces maxima correspondent aux deux branches de la Voie lactée, expliquées ainsi, du moins par approximation.

La courbe ainsi décrite se rapporte à l'ensemble des astres; mais il faut faire un départ entre ceux dont le paramètre est plus grand que celui de l'observateur, et ceux qui se trouvent dans le cas contraire. Pour les premiers, il y a concentration double équatoriale (galactique) et, pour une valeur donnée de s, la courbe qui représente leur répartition est plus accentuée que la précédente. Pour les autres, la courbe est toute différente; il y a concentration *polaire*, maxima pour $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$.

On expliquerait donc les traits essentiels : Voie lactée à deux branches, concentration polaire des nébuleuses, en considérant l'univers sidéral comme composé de nébuleuses prédominant dans une région centrale, et d'étoiles prédominant en dehors de cette région : le soleil serait dans une région de transition, très large d'ailleurs, et n'aurait plus la position privilégiée quasi centrale qu'il fallait lui attribuer dans les hypothèses en cours.

L'existence de ponts et l'écartement variable des deux branches résulteraient des écarts à la loi trop simple que nous avons admise.

La vitesse des rayons lumineux, celle que mesure l'observateur effectif (méthodes de Fizeau, Foucault, etc.), ne doit pas être calculée à la manière ordinaire par suite de la courbure du plan de la trajectoire; en appliquant une méthode plus correcte, puis en transformant conformément à la relativité générale, on trouve que, pour cet observateur, la vitesse sera la même dans toutes les directions.

OPTIQUE. — *Sur la précision de l'expérience de Michelson.* Note [1] de M. E. **Brylinski**, présentée par M. Daniel Berthelot.

Les résultats négatifs obtenus jusqu'en 1922 et le résultat positif, mais beaucoup plus petit que les prévisions, obtenu en 1922 [2], obligent à examiner si ces résultats ne tiendraient pas aux conditions mêmes de l'expérience.

Pour donner plus de sensibilité à l'essai, on dérègle d'un angle ε l'un des miroirs M, par exemple, en maintenant les notations d'une Note antérieure [3]. Dans ces conditions la direction de propagation de l'onde réfléchie, au lieu de faire avec OM, l'angle α de l'onde incidente, ou l'angle $\alpha + 2\varepsilon$ que l'on obtiendrait si le plateau était au repos absolu, fait un angle θ pour lequel des calculs simples, mais un peu longs, donnent l'expression

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha + \theta}{2} = \frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\cos(\alpha + \varepsilon) + \beta \sin \varepsilon}.$$

La déviation ε du miroir introduit d'ailleurs dans la marche d'un élément de l'onde un chemin supplémentaire qui modifie à la fois la durée du trajet et l'écart du centre de l'écran à l'arrivée de cet élément sur l'écran. En reprenant les calculs suivant la marche adoptée dans la Note rappelée ci-dessus, on trouve, en négligeant des termes d'ordre supérieur pour l'élément de l'onde qui arrive au centre de l'écran, une durée de trajet dont la valeur est, au quatrième ordre près,

$$t_1 = \frac{l}{c}\left[3\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) + 4\sin^2\varepsilon - \beta\left(2 - \frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}\varepsilon\right].$$

Il résulte d'ailleurs des conditions mêmes de l'expérience que l'angle ε est étroitement limité, et de l'ordre de grandeur de β tout au plus.

Le temps t_2 du trajet de l'onde qui va se réfléchir sur le miroir M_2 n'étant pas modifié, on aura, à l'approximation admise,

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{c}\left[\beta^2 - 4\varepsilon^2 + \beta\varepsilon\left(2 - \frac{\beta}{2}\right)\right].$$

On voit aisément que l'angle ε de déréglage est lié à la longueur d'onde λ et

---

(1) Séance du 26 novembre 1923.

(2) Voir *Physical Review*, 19e vol., 2, 1922; *Dayton C. Miller : Ether Drift Experiment at Mount Wilson Solar observatory*.

(3) Voir *Comptes rendus*, t. **177**, 1923, p. 874 à 876.

à la largeur δ des franges obtenues sur l'écran par la relation approchée suivante

$$\varepsilon = \pm \frac{\lambda}{2\delta},$$

de telle sorte que la distance x du centre de l'écran à laquelle se trouvera la raie brillante la plus rapprochée aura pour valeur, en prenant la longueur d'onde moyenne d'un demi-micron,

$$x = \pm 0,02\, \delta l \left[1 \pm \frac{5}{\delta} - \frac{25}{\delta^2}\right].$$

On voit que x s'annule, c'est-à-dire qu'il n'y aura aucune déviation pendant la rotation du plateau lorsque la largeur des franges sera approximativement égal à 3^{mm} pour les valeurs positives de ε et 8^{mm} pour les valeurs négatives de ε.

Ceci pourrait suffire à expliquer les résultats obtenus.

Mais il y a lieu, en outre, de tenir compte de la valeur de v à introduire dans les équations, valeur pour laquelle on prend, en général, le double de la vitesse relative de la Terre, soit environ 60 km : s. Or la valeur à adopter est seulement celle de la composante de la vitesse absolue dans le plan du plateau.

Tout d'abord, si la vitesse d'entraînement du système solaire vers l'apex paraît à peu près égale à la vitesse moyenne relative de la Terre, elle ne coïncide jamais en direction avec cette dernière, de sorte que si φ_1 est l'angle minimum de ces deux vitesses et φ_2 leur angle maximum, la résultante oscillera entre $60 \cos \frac{\varphi_1}{2}$ et $60 \cos \frac{\varphi_2}{2}$, et que, v entrant au carré dans les formules, l'ordre de grandeur envisagé pour le résultat devra être multiplié par un coefficient compris entre $\cos^2 \frac{\varphi_1}{2}$ et $\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}$ qui pourra être beaucoup plus petit que l'unité.

D'autre part cette vitesse résultante ne sera pas, en général, dans le plan du plateau de Michelson, et devra, de ce fait, être multipliée par un coefficient variable avec la latitude du lieu et l'heure de l'observation, qui sera le plus souvent compris entre 0 et 1, mais qui pourra être nul dans certaines conditions.

On voit que suivant les conditions de détail de l'expérience, suivant la position géographique du lieu et suivant la date et l'heure des essais, on devra aboutir à des déplacements de franges très variables, qui seront le plus souvent inférieurs à ceux qui ont été prévus jusqu'à présent, et qui pourront même s'annuler dans des cas fréquents.

RADIATION. — *Sur la théorie de la diffusion des rayons X.* Note de MM. **Edmond Bauer**, **Pierre Auger** et **Francis Perrin**, présentée par M. Jean Perrin.

M. Compton dans un remarquable travail sur la diffusion des rayons X a utilisé une règle de *correspondance* dont la forme est assez arbitraire (¹). Nous pensons qu'on peut énoncer un principe plus conforme à ce qui semble essentiel dans la notion introduite par Bohr.

Développant les idées déjà émises par l'un de nous (²), nous admettrons que le processus de la diffusion des rayons X par un électron libre se décompose de la façon suivante :

1° L'électron commence par absorber, suivant un mécanisme continu ou discontinu dont nous ignorons tout actuellement, un quantum entier $h\nu$ du rayonnement incident; il acquiert ainsi par suite de la pression de radiation une certaine vitesse v.

2° Il rayonne le quantum absorbé. Les fréquences, les intensités et les polarisations du rayonnement diffusé sont *en moyenne* les mêmes que si la diffusion était produite suivant les lois classiques par des électrons animés de la vitesse v. (Principe de correspondance.)

La quantité de mouvement et l'énergie totale devant se conserver lors de l'absorption du quantum par l'électron, on doit avoir

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}v \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

$$mc^2 + h\nu = \frac{\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2,$$

c étant la vitesse de la lumière, m la masse de l'électron avant l'absorption, et μ la masse (au repos) de l'électron *modifié par l'absorption du quantum*. En divisant membre à membre ces deux relations on obtient

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{h\nu}{mc^2}}{1+\frac{h\nu}{mc^2}},$$

(¹) A.-H Compton, *Phys. Rev.*, II, 21, 1923, p, 483.

(²) Ed. Bauer, *Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 1031.

Cette vitesse v est dirigée parallèlement au rayonnement incident; elle est précisément égale à la « vitesse équivalente » introduite par Compton [1]. L'application du principe de correspondance, sous la forme que nous avons admise, conduit donc exactement pour les fréquences et les intensités aux formules obtenues et vérifiées par ce physicien.

En ce qui regarde la réémission du quantum par l'électron, deux hypothèses sont possibles. On peut d'abord se placer à un point de vue semi-classique, et admettre que cette réémission se fait sous forme d'un train d'ondes sphériques [2]. L'électron garderait alors finalement la vitesse v (en grandeur et direction).

Si l'on adopte au contraire la théorie des quanta projectiles, on admettra que le quantum diffusé est émis brusquement dans une direction déterminée, l'électron subissant alors un certain recul. Les calculs de Compton donnent, dans ce cas, la vitesse finale de l'électron, qui fera en général un angle non nul avec la direction du rayonnement incident.

Des expériences utilisant par exemple la méthode de C. T. R. Wilson doivent permettre de trancher entre ces deux hypothèses.

Le temps qui sépare l'absorption du quantum et sa réémission est probablement très court, mais il nous semble difficile de le supposer rigoureusement nul, même dans la théorie des quanta projectiles. La considération de cet état intermédiaire permet en effet une application très directe du principe de correspondance et justifie immédiatement la méthode utilisée par Compton pour calculer les intensités.

Enfin les polarisations doivent aussi être les mêmes que si la diffusion était produite suivant les lois classiques par un électron animé de la vitesse v. En particulier la polarisation doit être complète dans une direction faisant avec ce rayon un angle θ donné par la relation $\cos\theta = \beta$.

Remarquons que pour la première fois dans l'hypothèse des quanta, l'absorption et l'émission de lumière sont liées à des modifications d'un électron libre (ou presque) et non à celles d'un complexe atomique. C'est l'électron qui est ici l'agent principal du phénomène optique. A ce point de vue la théorie des quanta se rapproche un peu de la théorie classique.

---

(1) A.-H. Compton, *loc. cit.*, p. 487.
(2) Ed. Bauer, *loc. cit.*

OPTIQUE. — *A propos des théories de la polarisation rotatoire naturelle.* Note (¹) de M. **H. Chipart**, présentée par M. L. Lecornu.

Les intéressantes recherches expérimentales de M. Longchambon sur le pouvoir rotatoire des cristaux biaxes donnent un regain d'actualité à l'étude, déjà ancienne, de la propagation de la lumière dans les milieux dépourvus de centre de symétrie.

Il faut remonter à Mac Cullagh pour retrouver un énoncé qui échappe aux critiques élevées à juste titre contre certaines théories modernes.

On sait que Fresnel interprétait la loi de dispersion rotatoire de Biot en énonçant que les corps isotropes-dissymétriques propagent deux ondes circulaires droite et gauche, dont la différence des indices varie en raison inverse de la période τ. Ce fut la lecture du *Report on Physical Optics* présenté par Lloyd à l'Association britannique, rapport où se trouvait mise en relief la remarque de Fresnel, qui suggéra tout d'abord à Mac Cullagh l'idée de substituer aux équations de propagation dans les milieux anisotropes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = B\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \qquad (Oz \text{ direction de propagation})$$

les équations plus générales

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + C\,\frac{\partial^3 \eta}{\partial z_3}, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = B\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - C\,\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}.$$

Présentée en 1836 sous une forme que Whethell (*History of Inductive Sciences*) qualifiait d'*obscur and oracular*, cette notion nouvelle fut précisée par son auteur dès que Babinet lui eut signalé le phénomène de dispersion des axes optiques. Il y trouva la confirmation de vues théoriques remontant à 1839 et les publia en 1842 dans son Mémoire *On the dispersion of the optic axes, and of the axes of elasticity in biaxal crystals.*

Mac Cullagh montre que l'équation du travail virtuel donné par Green :

$$\int \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta \right) d\varpi = \int \delta V\, d\varpi$$

rend compte des lois de Fresnel lorsqu'on choisit pour potentiel interne V une fonction du curl XYZ $\left(X = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \dots\right)$; remarque qui devait, un quart de siècle plus tard, suggérer à Maxwell la forme correcte de l'équation d'Ampère.

Étendant cette hypothèse et considérant à cet effet le potentiel V comme fonction, non seulement de X, Y, Z, mais encore des dérivées de tous ordres de X, Y, Z par rap-

(¹) Séance du 26 novembre 1923.

port aux coordonnées x, y, z, il ajoute qu'on explique de cette façon la polarisation rotatoire naturelle ainsi que la dispersion structurale.

A la vérité Mac Cullagh complétait son énoncé en stipulant que V ne dépend que de X, Y, Z et de ses curls successifs. Toutefois, en ce qui concerne le pouvoir rotatoire, on reconnaît que cette hypothèse additionnelle ne restreint pas la généralité des résultats.

En 1868 Sarrau et M. Boussinesq publiaient (*Journal de Liouville*) deux théories dont voici l'expression en langage électromagnétique :

Désignant par H, E, D, P le champ magnétique, le champ électrique, l'induction électrique et la polarisation diélectrique, on aurait, en se limitant aux termes de pouvoir rotatoire inclus :

(1) $$E = f_1\left(D, \frac{\partial D}{\partial x}, \frac{\partial D}{\partial y}, \frac{\partial D}{\partial z}\right)$$ (d'après Sarrau),

(2) $$P = f_2\left(E, \frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z}\right)$$ (d'après M. Boussinesq),

f_1 et f_2 désignant les fonctions vectorielles linéaires les plus générales. A l'une comme à l'autre de ces relations, il faut adjoindre les équations d'Ampère et de Faraday :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \operatorname{curl} H, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{curl} E$$ (unités de Heaviside, $c = 1$).

Comparons ces résultats à ceux de Mac Cullagh. Les équations de ce physicien sont du type (1) proposé par Sarrau, mais font de plus appel à la notion de potentiel interne. D'une manière générale nous dirons qu'*un vecteur* $F(x, y, z)$, *fonction d'un vecteur* $D(x, y, z)$ *et de ses dérivées premières par rapport aux coordonnées* x, y, z, *dérive d'un potentiel* U *lorsque ce vecteur* E *vérifie l'identité*

(1') $$\int (E.\delta D)\, d\varpi \equiv \int \delta U\, d\varpi$$

et cela, pour tout système de variations virtuelles δD_x, δD_y, δD_z *uniquement assujetties à s'annuler sur les surfaces de discontinuité, ainsi qu'à l'infini.*

Dans le langage de la théorie électromagnétique c'est manifestement le type (2) d'équations de M. Boussinesq qui doit être adopté de préférence au type (1) d'équations de Sarrau. Conformément aux vues de Green et de Mac Cullagh nous postulerons que la *polarisation diélectrique* P *est une fonction vectorielle linéaire* de E, $\frac{\partial E}{\partial x}$, $\frac{\partial E}{\partial y}$, $\frac{\partial E}{\partial z}$ *dérivant d'un potentiel.* Nous avons

donc l'identité

$$\int (\mathrm{P}.\partial\mathrm{E})\, d\varpi = \int \partial\mathrm{W}\, d\varpi \tag{2'}$$

de laquelle découlent les formules

$$\mathrm{P}_x = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{E}x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \frac{\partial \mathrm{E}x}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \frac{\partial \mathrm{E}x}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \frac{\partial \mathrm{E}x}{\partial z}} \right). \tag{2''}$$

RADIOACTIVITÉ. — *Recherches sur la pénétration des substances radioactives dans les métaux.* Note (¹) de Mlle **St. Maracineanu**, présentée par M. G. Urbain.

L'hypothèse de la pénétration des substances radioactives dans les métaux qui leur servent de support a été émise par Mme Curie pour expliquer la divergence des valeurs trouvées pour la constante du polonium.

Pour vérifier cette supposition j'ai entrepris quelques expériences sur du polonium et sur de l'actinium. Ces expériences peuvent être classées comme il suit :

1. *Expériences à la température ordinaire.* — *a.* On évapore au bain-marie une goutte d'une solution de polonium déposée sur une très mince feuille d'or, exempte de trous, cette feuille retournée est placée sur un disque de cuivre recouvert d'un anneau ne laissant passer que le rayonnement qui traverse la feuille d'or d'une face à l'autre.

En mesurant le courant d'ionisation on trouve durant les premiers huit jours que l'intensité du rayonnement accuse une très légère augmentation pour continuer à diminuer suivant une loi exponentielle donnant une période apparente de 144 jours.

Les expériences ont duré 318 jours. Le polonium de ces expériences a été soigneusement purifié et ne contenait plus de Ra D + Ra E, pouvant donner du rayonnement pénétrant.

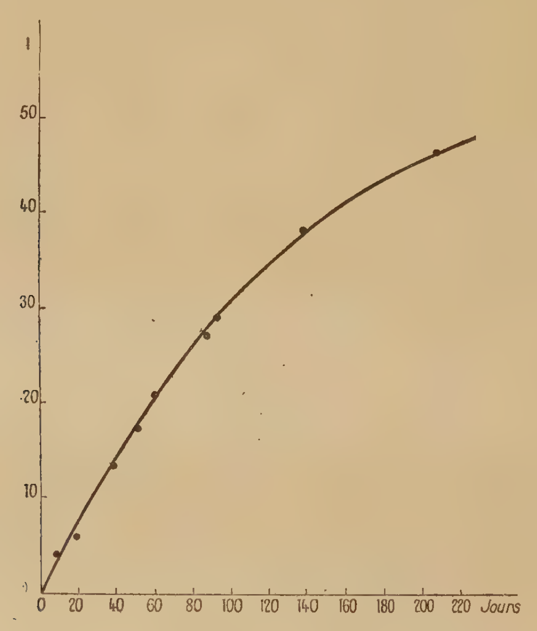
Une autre partie de la même préparation de polonium déposée toujours en évaporant de petites gouttes sur de l'or, mesurée en utilisant le courant d'ionisation donné par le rayonnement direct, donne une période de 138 jours.

---

[1] Séance du 26 novembre 1923.

Ce résultat pourrait être expliqué par une pénétration lente du polonium d'une face à l'autre de la feuille d'or.

b. Quand le polonium a été déposé sur du plomb de $\frac{2}{100}$ à $\frac{4}{100}$ de millimètre d'épaisseur et que l'on mesure le courant d'ionisation pour le rayonnement qui traverse le métal, on constate une faible augmentation continue comme l'indique la courbe; tandis que l'intensité du courant d'ionisation donné par le rayonnement direct décroît suivant une loi exponentielle d'après une droite qui correspond à une période apparente T = 134,5 jours.



Les intensités du courant d'ionisation donné par le rayonnement qui traverse le plomb sont très faibles et par conséquent les mesures très délicates; de sorte qu'elles ont été faites soit à l'électromètre à quadrants, soit à l'électromètre Szillard (qui convient bien pour cet usage). Par exemple, le courant d'ionisation obtenu à travers une feuille mince de $\frac{2}{100}$ à $\frac{3}{100}$ de millimètre de Pb a augmenté depuis I = 0 à I = 0,002 U. E. S. durant 92 jours, alors que la valeur initiale de la goutte de Po était de 1,44 E. S.

c. Quelques expériences ont été faites en mesurant la décroissance du dépôt actif de l'actinium durant 250 à 300 minutes et dans certains cas on obtient des décroissances anormales qui pourraient indiquer une pénétration du dépôt de l'actinium dans le métal qui lui sert de support.

Sur des disques en verre, aucune pénétration n'a été remarquée ni dans le cas du Po, ni dans celui de l'actinium. Avec ce dernier, j'ai obtenu dans ces conditions des courbes très régulières dont on déduit la période de l'actinium B de $T = 36',0$.

Expériences à température élevée. — En évaporant des gouttes d'une solution de Po sur des feuilles minces d'or et sur du Pb mince de $\frac{2}{100}$ et $\frac{3}{100}$ de millimètre à $\frac{1}{10}$ de millimètre et en mesurant le courant d'ionisation donné par les rayons qui traversent le métal avant et après un chauffage à l'étuve de 180° à 200° durant 20 minutes pour de l'or et de 150° à 180° durant 2-24 heures pour du plomb, on constate que la pénétration est plus accentuée qu'à la température ordinaire.

Les variations pour du Pb de $\frac{1}{10}$ de millimètre d'épaisseur étaient par exemple de $I = 0$ avant le chauffage à $I = 16 \times 10^{-4}$ E.S. après le chauffage et de $I = 16 \times 10^{-4}$ E.S. à 3×10^{-3} E.S durant 92 jours après le chauffage; la valeur initiale de la goutte étant 0,79 U.E.S.

Sur des lamelles de verre très minces aucune pénétration n'a été constatée.

Dans d'autres conditions d'expériences qu'il est nécessaire d'étudier plus à fond le phénomène est encore beaucoup plus accentué, de sorte que la place active qui apparaît sur la face opposée peut être descellée par de nombreuses scintillations produites sur un écran au SZn ou par l'effet sur une plaque photographique.

Il est probable d'après ces expériences que le phénomène de pénétration soit la cause responsable des variations des valeurs trouvées pour la constante du Po et peut-être aussi pour d'autres constantes. On peut conclure que le support en verre est le plus indiqué pour la détermination de ces constantes.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la diffusion de la vapeur de soufre dans l'air à la température ordinaire.* Note de M. **Chavastelon**, présentée par M. A. Haller.

Dans un tube de quartz transparent de 12^{cm} de long et 12^{mm} de diamètre extérieur, on introduit quelques grammes de fragments de soufre en canons, dont le diamètre moyen est compris entre $0^{mm},5$ et 1^{mm}. On les distribue sur toute la longueur intérieure du tube, après avoir formé, autour de la surface extérieure, par enroulement et dans l'ordre des métaux, 4 à 5 spires

avec des fils, décapés mécaniquement, d'argent, de plomb et de cuivre, de $\frac{1}{10}$ à $\frac{2}{10}$ de millimètre de diamètre.

Les spires d'argent sont à $2^{cm},5$ du côté ouvert du tube et les autres, à la suite, sont distantes de 2^{cm}, environ.

Ce petit tube est introduit horizontalement dans un autre, en quartz transparent également, de 24^{mm} de diamètre extérieur et de 15^{cm} de longueur. Le côté ouvert du premier est donc dirigé vers le fond du plus grand, sans s'y appliquer complètement, et on le maintient en place avec un tampon de coton de verre enveloppant un fragment d'acide métaphosphorique qui assurera la siccité de l'air intérieur. Un bon bouchon, paraffiné, de liège, introduit de force dans le grand tube en quartz, emprisonne un volume restreint d'air et assure une obturation hermétique.

On prépare, immédiatement après, un dispositif semblable, mais dans lequel le tampon de coton de verre est humecté d'eau.

Les deux groupes de tubes, contenant, l'un, de l'air sec, l'autre, de l'air saturé d'humidité, sont rangés côte à côte sur une étagère du laboratoire que n'atteignent jamais, directement, les rayons solaires.

L'emploi du quartz transparent rapproche le plus possible ces expériences de ce qu'elles seraient si l'on pouvait les faire à l'air libre, sans interposition d'un système rigide entre le soufre et les spires métalliques, puisque sont seules interceptées les radiations ultraviolettes de plus courte longueur d'onde.

Après dix-neuf mois d'exposition à la lumière, à des températures ayant varié de $+6^{\circ}$ à $+35^{\circ}$, du 20 mars 1922 au 23 octobre 1923, dans le tube à air sec, toutes les spires, intactes, ont conservé leur surface brillante; elles ne présentent aucune trace de sulfuration. Dans le tube à air humide, toutes les spires sont, après huit mois environ, très légèrement ternies, probablement par suite de l'ionisation de la vapeur d'eau.

Les vapeurs de soufre formées dans le petit tube de quartz ne se sont donc pas extravasées dans le grand. Le fait ne résulte pas d'une modification de la surface des fragments de soufre, car, si, par un mouvement convenable, on met le soufre en contact avec les spires métalliques, celles-ci se sulfurent assez rapidement.

Ces résultats confirment ceux déjà indiqués dans la précédente Communication.

Sur le même sujet, d'autres expériences sont en cours d'exécution.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Dosage de petites quantités de molybdène. Application au phosphomolybdate d'ammonium pour le titrage indirect du phosphore.* Note de M. **A. Vila**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

I. La mesure de petites quantités de phosphore, inférieures au dixième de milligramme, peut être rapidement effectuée par une méthode volumétrique, en dosant le molybdène dans le phosphomolybdate d'ammonium.

Les propriétés de l'oxyde salin bleu de molybdène $MoO^2, 4MoO^3$, corps bien défini depuis les travaux de M. M. Guichard ([1]), sur la constitution du bleu de molybdène, se prêtent très bien à cette application.

En principe on produit l'oxyde bleu aux dépens de l'anhydride molybdique et cet oxyde est ramené au degré d'oxydation supérieur par une liqueur titrée de permanganate de potasse. Ce genre de titrage, on le sait, s'opère avec une grande précision; MM. Fontes et Thivolle ([2]) l'ont montré récemment en instituant leur méthode molybdo-manganimétrique, basée sur la propriété de l'oxyde bleu d'être parfaitement stable en milieu acide phosphorique et de ne s'oxyder que sous l'action des réactifs employés.

En application de ces données, la combinaison molybdique à doser est réduite par l'hydrogène et le produit obtenu, bioxyde MoO^2 ou métal Mo, mis en présence d'un excès d'acide molybdique forme quantitativement un poids correspondant d'oxyde salin bleu.

L'ensemble des réactions est représenté par les réactions :

(I) $MoO^3 + H^2 = MoO^2 + H^2O$, $MoO^2 + 4MoO^3 = MoO^2, 4MoO^3$, (II)

(III) $MoO^2, 4MoO^3 + O = 5MoO^3$, $MoO^2 + 2H^2 = Mo + 2H^2O$, (IV)

(V) $Mo + 2MoO^3 = 3MoO^2$.

II. Comme l'acide molybdique pur, le phosphomolybdate d'ammonium donne dans la première phase de réduction (I), entre 400° et 500°, du bioxyde de molybdène poudre bleu noir.

Expérience témoin. — MoO^3 pur, $0^g,2310$ chauffé 30 minutes à 400°-500° en nacelle de platine dans un courant d'hydrogène, a donné $0^g,2055$ d'oxyde noir. Calculé pour MoO^2 : $0^g,2053$.

Expérience sur $PO^3H, 12MoO^3$. — $0^g,1925$ de phosphomolybdate

---

([1]) M. Guichard, *Annales de Physique et de Chimie*, 7e série, t. 23, p. 519.

([2]) G. Fontes et L. Thivolle, *Bull. de la Soc. Chim. Biol.*, t. 4, 1922, p. 614; t. 5, 1923, p. 325.

d'ammonium déshydraté à 400°-500°, chauffé à la même température 30 minutes dans un courant d'hydrogène, a donné $0^{g},1695$ d'oxyde noir. Calculé pour $PO^3H, 12MoO^2$: $0^{g},1706$.

Ce bioxyde MoO^2, insoluble dans la plupart des réactifs, est attaqué par l'acide molybdique dissous dans l'acide phosphorique en donnant naissance à du bleu de molybdène soluble et l'expérience montre que le titrage molybdo-manganimétrique du bioxyde de molybdène s'opère quantitativement :

Dans un essai sur de petites quantités de phosphomolybdate d'ammonium et à la faveur d'une élévation de température au rouge, vers 700°, on constata, comme l'a indiqué M. Guichard, que la deuxième phase de la réduction s'était produite (II), le dépôt d'oxyde ayant fait place à du molybdène métallique. Par la suite, cette opération a toujours été répétée, avec succès, en quelques minutes.

Au rouge, la production du métal est d'autant plus rapide que la surface de l'oxyde en contact avec l'hydrogène est plus grande : cette condition est généralement réalisée dans les opérations analytiques. La réduction à l'état de molybdène confère alors au dosage molybdo-manganimétrique une très grande finesse, l'association des réactions (I), (II), (IV) et (V) produisant le bleu de molybdène avec le maximum de rendement.

III. Le mode opératoire adopté consiste à évaporer à sec, dans un tube à essai en silice transparente, la solution ammoniacale d'acide molybdique pur ou de phosphomolybdate d'ammonium pur. Le dépôt doit ne recouvrir que le tiers environ de la longueur totale du tube.

Dans le tube fermé on fait circuler un courant d'hydrogène pur et l'appareil est placé dans un four électrique à résistance, chauffé vers 700°. Après 15 minutes de chauffe, on retire le tube qui est laissé à refroidir dans l'hydrogène.

Le réactif d'attaque est une solution d'acide molybdique pur, 5^{g} dans l'acide phosphorique à 60°, 10^{cm^3}, décolorée exactement au permanganate de potasse et amenée au volume de 50^{cm^3} avec de l'eau distillée.

On chauffe avec précaution le réactif, versé par fractions de 2^{cm^3} dans le tube en silice contenant le molybdène. Le bleu de molybdène, immédiatement formé, fait place à une liqueur sirupeuse, vert plus ou moins foncé, qui est laissée à refroidir. En additionnant d'eau et chauffant à l'ébullition, le bleu de molybdène se reforme intégralement. On le titre avec une liqueur de permanganate de potasse $\frac{N}{400}$. Le terme du virage est indiqué par la décoloration complète de la solution.

1^{cm^3} de $MnO^4K\,\frac{N}{400}$ correspond en milligrammes à 0,200 de Mo; à 0,300 de MoO^3; à 0,00538 de P; à 0,0123 de P^2O^5.

Vérification. — Sur 2^{cm^3} de solution de PO^4K^2H, $\frac{N}{500}$, on précipite le phosphore à l'état de phosphomolybdate d'ammonium en suivant les précautions indiquées par Hundeshagen, Woy, Treadwell, H. Maurice (¹) après réduction et attaque avec 4^{cm^3} de réactif phosphomolybdique, on a consommé 24^{cm^3},6 de $MnO^4K\,\frac{N}{400}$.

Introduit $P = 0^{mg},124$. Trouvé $P = 0^{mg},130$.

La même opération a été répétée à plusieurs reprises sur 1^{cm^3} de solution $PO^4K^2H\,\frac{N}{500}$, contenant $0^{mg},062$ de P. On a trouvé $P = 0^{mg},059$; $P = 0^{mg},60$; $P = 0^{mg},066$.

En opérant sur $0^{cm^3},5$ de solution $PO^4K^2H\,\frac{N}{400}$ contenant $0^{mg},031$ de P, après réduction et attaque du molybdène par 2^{cm^3} de réactif, on a consommé 5,8 de $MnO^4K\,\frac{N}{400}$ correspondant à $P = 0^{mg},031$.

Conclusion. — La réduction de l'anhydride molybdique en molybdène par l'hydrogène pur est rapide et complète vers 700° sur de petites quantités, présentant une grande surface de contact.

Le molybdène donne, en réagissant sur un excès d'acide molybdique, un poids de bleu de molybdène 14,6 fois plus élevé que celui de l'anhydride molybdique converti en métal.

Si le molybdène provient de phosphomolybdate d'ammonium réduit, le poids d'oxyde bleu est plus de 800 fois supérieur au poids de phosphore combiné. Cette amplification considérable, alliée à l'exactitude de l'analyse molybdo-manganimétrique font proposer cette méthode pour le dosage de petites quantités de molybdène et le titrage indirect du phosphore dans la recherche de doses minimes de l'ordre du centième de milligramme.

(¹) HUNDESHAGEN, *Zeit. f. analyt. Chem.*, t. 28, 1889, p. 141. — WOY, *Chemiker Zeitung*, 1897, p. 442-444 et 469-473. — TREADWEL, *Lerbuch der analyt. Chem.*, t. 2, 1907, p. 330. — H. MAURICE, *Variation avec l'âge dans la teneur de quelques organes en phosphore total* (*Thèse*, Fribourg, Suisse, 1910).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur les acides de la cire d'abeilles.*
Note de MM. **A. Gascard** et **G. Damoy**, présentée par M. Charles Moureu.

Par l'action de l'alcool, Brodie a séparé de la cire d'abeilles deux parties : la *myricine* insoluble et la *cérine* soluble à chaud. Pour lui la myricine est l'éther palmitique d'un alcool $C^{30}H^{62}O$ que l'oxydation transforme en acide *mélissique* $C^{30}H^{60}O^2$ (P. F. 88°-89°) et la cérine est un acide, l'acide *cérotique* $C^{27}H^{54}O^2$ (P. F. 78°). Simultanément Brodie découvrait, dans la cire de Chine, ce même acide cérotique éthérifiant l'alcool correspondant.

L'étude de la cérine a été reprise par plusieurs chimistes, qui s'accordent à y voir un mélange de deux acides : l'acide mélissique $C^{30}H^{60}O^2$ ou $C^{31}H^{62}O^2$ et l'acide cérotique $C^{27}H^{54}O^2$ ou $C^{26}H^{52}O^2$ ou même $C^{25}H^{50}O^2$.

Il n'est pas douteux que le nom d'acide mélissique, malgré les deux formules qui lui sont attribuées, s'applique à un seul acide. L'un de nous [1] ayant montré que l'alcool de Brodie répond à la formule $C^{31}H^{64}O$, celle de l'acide mélissique est $C^{31}H^{62}O^2$.

Pour l'acide cérotique la question est plus compliquée et il est fort probable que ce nom a été attribué à des acides différents.

La formule $C^{27}H^{54}O^2$, donnée pour la première fois par Brodie, est admise par quelques auteurs. D'autres préfèrent la formule $C^{26}H^{52}O^2$, Lewkowitsch [2] (pour l'acide de la cérine), Henriques [3] (pour l'acide de la cire de Chine). Enfin M. Marie [4], dans son étude sur les acides mélissique et cérotique, donne à ce dernier le point de fusion 77°,8 et, tout en lui conservant le nom de *cérotique*, il hésite entre les formules $C^{26}H^{52}O^2$ et $C^{25}H^{50}O^2$, préférant toutefois cette dernière.

L'erreur de ces auteurs a été de croire que la cérine ne renferme que deux acides; ils appellent mélissique le moins soluble et donnent à l'autre le nom de *cérotique*.

La question se complique encore du fait que MM. Tropsch et Kreutzer [5]

---

(1) A. Gascard, *Thèse de la Faculté des sciences de Paris*, 1920, et *Annales de Chimie*, 1920, p. 357.

(2) Lewkowitsch, *Proc. Chem. Soc.*, 1890.

(3) Henriques, *D. Chem. Ges.*, t. 30, p. 1415; *Bull. Soc. chim.*, t. 20, 1898, p. 72.

(4) Marie, *Thèse Faculté sciences, Paris*, 1895; *Bull. Soc. chim.*, t. 15, 1896, p. 510.

(5) Tropsch et Kreutzer, *Brennstoffchemie*, t. 3, 1922, p. 49 et 177; *Bull. Soc. chim.*, 4e série, t. 32, p. 1031 et 2140.

ayant isolé, de la cire de lignite, un acide, qui paraît identique à celui de la cire de Chine, lui ont donné le nom d'acide *carbocérique*. Ils admettent, avec Lewkowitsch, que l'acide de la cérine, répondant à la formule $C^{26}H^{52}O^2$, doit conserver le nom d'acide *cérotique*.

Nous estimons que Brodie ayant donné, le premier, ce nom à l'acide de la cire de Chine $C^{27}H^{54}O^2$ et l'un de nous (*loc. cit.*) ayant établi que cet acide possède bien cette formule, le nom de cérotique doit lui être conservé, celui de carbocérique étant abandonné.

Nous nous sommes proposé de rechercher la formule de l'acide (P. F. 77°,8) étudié par M. Marie sous le nom d'acide cérotique; acide qui doit être différent de l'acide cérotique vrai dont le point de fusion est 82°,5 (1). Nous nous sommes proposé, en outre, de voir si la cire d'abeilles ne renfermerait par l'acide $C^{27}H^{54}O^2$, ce qui serait une raison de plus pour conserver à cet acide le nom donné par Brodie.

En appliquant à ces recherches la méthode des cristallisations fractionnées à température déterminée suivie déjà par l'un de nous (*loc. cit.*), nous avons pu, non seulement isoler ce dernier acide, mais encore l'acide $C^{29}H^{58}O^2$.

Pour cela, la cire totale d'abeilles est saponifiée et les acides sont transformés en sels de calcium, que l'on épuise par l'alcool bouillant; les acides, mis en liberté, sont séparés, les uns des autres, par des cristallisations fractionnées à température déterminée, avec filtration à cette même température. Le dissolvant était l'alcool à des degrés divers.

La pureté des acides a été contrôlée par la constance du point de fusion, après plusieurs cristallisations dans les dissolvants différents, et par la forme cristalline. Les poids moléculaires ont été établis à l'aide de l'acidimétrie et du dosage de Ag dans les sels d'argent (2).

Nous avons isolé ainsi, après de nombreuses cristallisations, quatre acides répondant aux formules suivantes :

1° $C^{25}H^{50}O^2$ P. F. = 77°,8. *néocérotique*.

2° $C^{27}H^{54}O^2$ P. F. = 82°,5. *cérotique*.

3° $C^{29}H^{58}O^2$ P. F. = 86°,8. *montanique*.

4° $C^{31}H^{62}O^2$ P. F. = 90°. *mélissique*.

---

(1) Le point de fusion attribué par Brodie à l'acide cérotique 78° est beaucoup trop bas et se rapproche de celui de l'acide isolé par M. Marie; c'est pour cela sans doute que M. Marie lui a conservé son nom. L'acide isolé par Brodie était très impur.

(2) Les détails seront donnés dans une autre publication.

Tous cristallisés en lamelles hexagonales ou losangiques; le premier et le dernier beaucoup plus abondants que les deux autres.

Le premier de ces acides est celui de M. Marie; nous proposons de le nommer acide *néocérotique* ([1]).

Le deuxième étant identique à celui de la cire de Chine, nous lui conservons le nom d'acide *cérotique*; le troisième paraît identique à celui retiré de la cire de lignite, par MM. Tropsch et Kreutzer et appelé par eux acide *montanique*, nous adoptons ce nom; enfin le quatrième est l'acide *mélissique*.

Les produits, obtenus dans les cristallisations précédentes, qui possédaient des points de fusion intermédiaires à ceux de ces quatre acides, ont toujours pu être dédoublés; il n'existe donc pas d'autre acide dans le mélange que nous avons étudié et, par conséquent, pas d'acide à nombre pair d'atomes de carbone.

La présence de quatre acides, à nombre impair d'atomes de carbone, se suivant en une série régulière, est très remarquable et en contradiction avec les idées admises généralement sur la parité des atomes de carbone des acides gras naturels.

Nous sommes fondés à nous demander si la série de ces acides impairs ne se prolonge pas au-dessous de C^{25}, et si l'acide de la myricine est bien l'acide palmitique, comme le pensait Brodie.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques synthèses d'acides bibasiques à fonction éther-oxyde.* Note de M. **Marcel Godchot** présentée par M. Haller.

En 1907, nous avons fait connaître, en collaboration avec Jungfleisch, une méthode simple permettant l'obtention d'acides bibasiques à fonction éther-oxyde, de formule générale ([2])

$$\begin{array}{c} R - CH - CO^2H. \\ \mid \\ O \\ \mid \\ R' - CH - CO^2H \end{array}$$

([1]) Carius (*Annalen der Chimie und Pharmacie*, t. **129**, p. 168, et *Bull. Soc. chim.*, t. **2**, 1864, p. 375) a signalé dans la graisse des glandes anales de l'hyène un acide qu'il appelle *hyénique* et qui, ayant pour formule $C^{25}H^{50}O^2$, fondrait à 77°-78°.

Nous n'avons pas adopté ce nom, l'acide de Carius paraissant impur, car, d'après l'auteur, il se ramollit avant de fondre et ses sels semblent mal définis.

([2]) *Comptes rendus*, t. **144**, 1907, p. 979; t. **145**, p. 70; t. **146**, 1908, p. 26.

Cette méthode consistait à faire réagir les éthers — α — halogénés des acides sur les dérivés sodés des éthers des acides-alcools

$$R-CHX-CO^2C^2H^5 + R'-CHONa-CO^2C^2H^5 = \begin{array}{l} R-CH-CO^2C^2H^5 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; O \\ \quad\;\; | \\ R'-CH-CO^2C^2H^5 \end{array} + NaX.$$

Généralisée par nous en mettant en œuvre uniquement des composés aliphatiques, cette réaction nous avait permis d'obtenir en particulier, avec un excellent rendement, l'adide diglycolique, l'acide dilactylique et ses homologues. Il nous a paru intéressant de vérifier la généralité de la méthode en s'adressant à des composés de la série aromatique, de façon à obtenir des acides bibasiques à fonction éther-oxyde renfermant un ou deux radicaux phényles. La présente Note a pour but de résumer les principaux résultats obtenus.

I. *Acide αα'-diphényldiglycolique* $\begin{array}{l} C^6H^5-\overset{\alpha}{C}H-CO^2H. \\ \qquad\quad\; | \\ \qquad\quad\; O \\ \qquad\quad\; | \\ C^6H^5-\underset{\alpha'}{C}H-CO^2H \end{array}$ — Ce composé, inconnu jusqu'ici, s'obtient à l'état d'éther éthylique par action de l'α bromophénylacétate d'éthyle sur le phénylglycolate d'éthyle sodé, lequel se prépare facilement en faisant réagir le sodium sur le phénylglycolate d'éthyle en solution éthérée. En opérant comme nous l'avons indiqué, on constate la formation de bromure de sodium et le traitement ultérieur permet d'atteindre le dyphényldiglycolate d'éthyle, constitué par un liquide ne distillant pas sans décomposition, même dans le vide. A l'ébullition, la potasse alcoolique saponifie cet éther avec formation de diphényldiglycolate neutre de potassium qui se dépose aussitôt. Ce sel de potassium, décomposé en solution aqueuse, par la quantité correspondante d'acide sulfurique, fournit l'acide libre, insoluble dans l'eau, peu soluble dans les dissolvants organiques, sauf dans l'acide acétique cristallisable. Cet acide diphényldiglycolique est constitué par de très belles aiguilles prismatiques, se décomposant au delà de 300° avant de fondre.

II. *Acide α-méthyl-α'-phényldiglycolique* $\begin{array}{l} CH^3-\overset{\alpha}{C}H-CO^2H. \\ \qquad\quad\; | \\ \qquad\quad\; O \\ \qquad\quad\; | \\ C^6H^5-\underset{\alpha'}{C}H-CO^2H \end{array}$ — Son éther éthylique, obtenu en faisant réagir sur le phénylglycolate d'éthyle

sodé l'α-bromopropionate d'éthyle, distille sous 15^{mm} vers 180°-190° en se décomposant partiellement. A l'ébullition, la potasse alcoolique saponifie cet éther avec formation de méthylphényldiglycolate neutre de potassium peu soluble dans l'alcool. Par décomposition de ce sel, en solution aqueuse, par SO^4H^2 en quantité voulue, on met l'acide méthylphényldiglycolique en liberté. Ce dernier, extrait à l'éther et purifié ensuite par cristallisation dans un mélange benzène + éther, constitue des aiguilles incolores, fusibles vers 188°.

III. *Acide α-phényldiglycolique* $C^6H^5 - \overset{\alpha}{C}H - CO^2H$. — Cet acide

$$\begin{array}{l} C^6H^5 - \overset{\alpha}{C}H - CO^2H \\ \qquad\quad\;\; | \\ \qquad\quad\;\; O \\ \qquad\quad\;\; | \\ \qquad\quad\;\; CH^2 - CO^2H \end{array}$$

s'obtient à l'état d'éther éthylique par action du monochloro-acétate d'éthyle sur le phénylglycolate d'éthyle sodé.

L'α-phényldiglycolate d'éthyle se présente sous la forme d'un liquide, à odeur assez agréable, bouillant sans décomposition vers 182°-184° sous 10^{mm}; sa densité à 21° est égale à 1,127 et son indice de réfraction par rapport à la raie D et à 21° est égal à 1,4925 (R.M. trouvée : 68,52; calculée pour $C^{14}H^8O^5$: 68,20).

Par saponification à l'aide de la potasse alcoolique, le phényldiglycolate d'éthyle donne naissance au phényldiglycolate de potassium; mais, à l'inverse des sels de potassium des acides précédents, ce sel est soluble dans l'alcool. Par décomposition de ce sel, en solution aqueuse, par SO^4H^2 et par extraction à l'aide de l'éther, on isole l'acide α-phényldiglycolique lui-même, constitué par un liquide sirupeux, bouillant vers 203° sous 15^{mm} en s'altérant un peu. Afin de caractériser cet acide à l'aide d'un de ses dérivés, nous en avons fait la diamide,

$$NH^2.CO - \underset{\displaystyle C^6H^5}{\underset{|}{CH}} - O - CH - CO.NH^2,$$

en maintenant plusieurs jours, à 15°, son éther éthylique en solution dans l'alcool absolu saturé d'ammoniaque. Par évaporation de la solution alcoolique, on obtient un résidu solide, constitué par la diamide; cette dernière, peu soluble dans le benzène et dans l'éther, est purifiée par cristallisation dans l'acétone bouillante qui l'abandonne sous forme de mamelons incolores, fusibles vers 159°-160°.

CRISTALLOGRAPHIE. — *Sur les variations de la dispersion de biréfringence dans un même cristal.* Note de M. C. GAUDEFROY, présentée par M. F. Wallerant.

Cette Note a pour objet de montrer que des biseaux taillés dans un même cristal suivant des orientations différentes ne donnent généralement pas la même échelle chromatique (¹) lorsqu'on les éclaire en lumière parallèle, entre nicols croisés.

On peut s'en rendre compte, par un procédé approximatif, en faisant tourner un biseau placé entre nicols croisés, autour d'une droite quelconque; on observe alors des échelles successives différentes, qui ressemblent à peu près à celles qu'on observerait sur des biseaux taillés suivant des orientations différentes et correctement placés, c'est-à-dire de telle manière que la normale ON à la face d'entrée de la lumière soit parallèle aux rayons incidents. Ainsi un biseau taillé dans un cristal de sel de Seignette ammoniacal, biseau défini par l'angle de 24° que fait la normale ON à la face d'entrée de la lumière avec la première bissectrice n_p des axes optiques dans le plan $n_m n_p$, présente une échelle quasi achromatique bien caractérisée. Si l'on fait tourner ce biseau autour d'une droite parallèle à n_g, l'échelle devient directe ou inverse selon que la rotation amène n_m ou n_p à se rapprocher de la direction du faisceau incident. Or un biseau dont l'orientation est définie par une normale ON parallèle à n_m, et correctement placé, donne une échelle directe, et un autre défini par ON parallèle à n_p donne une échelle inverse.

Un second procédé, également approximatif, consiste dans l'examen de certaines particularités dans les anneaux colorés qu'on observe en lumière convergente sur une lame à faces parallèles.

Un cristal biaxe présente généralement, dans le voisinage du pôle d'un axe optique, une courbe quasi achromatique, courbe fermée qui passe par le pôle de l'axe optique relatif à la lumière jaune, ou qui joint deux pôles contigus. Cette courbe traverse les lemniscates colorées; elle est jalonnée par des points alternativement noirs et blancs. Elle limite deux régions : dans l'une, les teintes « montantes » présentent la suite *directe;* dans l'autre, la suite *inverse*. Or un biseau éclairé en lumière parallèle et correctement

(¹) Voir ma Note récente (*Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 1046).

placé donne une échelle directe ou inverse selon que la normale ON à la face d'entrée a son pôle dans la première ou dans la deuxième région.

Ces propriétés peuvent être prévues par le calcul des variations de la fonction $\Phi' = \frac{n'_1 - n'_2}{n_1 - n_2} - \frac{1}{\lambda}$ ([1]) avec la direction ON normale aux ondes réfractées.

Ainsi on peut montrer que, dans un cristal uniaxe, la fonction Φ' reste constante lorsque la direction ON varie : en conséquence, l'échelle y reste invariable.

Dans un cristal biaxe, la fonction Φ' relative à une longueur d'onde donnée passe par toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$: par conséquent les échelles passent par toutes les extensions possibles.

On arrive à cette conclusion en établissant l'équation suivante :

$$(1) \quad (n_1 - n_2)^2 = [(n_g - n_m)\sin^2\alpha - (n_m - n_p)\sin^2\gamma]^2 + 4(n_g - n_m)(n_m - n_p)\cos^2\beta,$$

où $n_1 - n_2$ est la biréfringence des ondes dont la normale ON fait les angles α, β, γ, avec n_g, n_m, n_p, respectivement.

Cette équation (1) sert à évaluer Φ' :

$$(2) \qquad \Phi' = \frac{(\nu\sin^2\alpha - \mu\sin^2\gamma)(\nu'\sin^2\alpha - \mu'\sin^2\gamma) + 2(\mu\nu' + \nu\mu')\cos^2\beta}{(\nu\sin^2\alpha - \mu\sin^2\gamma)^2 + 4\mu\nu\cos^2\beta}$$

où

$$\mu = \frac{n_m - n_p}{\lambda}, \qquad \nu = \frac{n_g - n_m}{\lambda};$$

μ' et ν' sont leurs dérivées.

Si l'on porte sur ON un rayon vecteur égal à Φ', le lieu des extrémités est une surface dont voici quelques propriétés :

1° Chaque valeur définie, c, de la fonction Φ' est représentée par une courbe C qui passe par les quatre axes optiques A. C. I. ([2]), en formant deux ou quatre anneaux fermés. En particulier, une courbe $\Phi'_j = c$, relative à la longueur d'onde du jaune moyen, est le lieu des directions ON correspondant à des échelles de même extension.

2° Si ON, partant de la direction d'un axe optique, contourne un octant défini par n_g, n_m, n_p, ON traverse des courbes $\Phi'_j = c$, où c croît (ou décroît) continuellement de $-\infty$ à $+\infty$. Par suite, les échelles correspondantes varient depuis les échelles directes les plus restreintes jusqu'aux inverses

---

([1]) Pour le rôle de la fonction Φ' dans les propriétés de l'échelle chromatique, voir la Note antérieure.

([2]) Axes de réfraction conique interne.

les plus restreintes en passant par une échelle quasi achromatique. Les courbes les plus remarquables sont $\Phi'_j = -\frac{1}{\lambda_j}$, qui correspond à une extension égale à celle de l'échelle de Newton; et $\Phi'_j = 0$, qui correspond aux échelles quasi achromatiques.

Aux propriétés optiques qui servent à caractériser les espèces cristallines, on peut ajouter : soit la position des anneaux quasi achromatiques, et de leur intersection avec les plans optiques principaux; soit les extensions des trois échelles chromatiques principales; soit les trois valeurs de Φ'_j relatives aux trois plans optiques principaux.

LITHOLOGIE. — *Sur les roches de l'Aïr (Sahara central).* Note de M. **M.-E. Denaeyer.**

Les observations sommaires du Dr H. Barth (1) et d'Erwin von Bary (2), puis l'importante étude de M. L. Gentil (3), ainsi que les documents de Foureau (4) et de Chudeau (5) constituent jusqu'à présent la somme de nos connaissances lithologiques sur l'Aïr. Dans deux Notes antérieures (6), j'ai donné un aperçu des roches que Chudeau avait récoltées dans l'Ahnet, le Tanezrouft, l'Ahaggar et l'Adrar des Iforass. Je me propose de donner ici les résultats de l'examen de celles qu'il a recueillies dans l'Aïr.

L'Aïr est une pénéplaine constituée par un complexe de roches granitiques et de schistes cristallins redressés sur quoi reposent des dômes et des coulées de lave (7).

Les granites de ce complexe sont presque tous hololeucocrates. Leur structure est généralement granulitique. Dans la Téloua, ce granite passe à une diorite très riche en quartz.

---

(1) Dr H. Barth, *Voyages et découvertes dans l'Afrique septentrionale et centrale.* Trad. P. Ithier, Paris, 1860.

(2) E. von Bary, *Le dernier rapport d'un Européen sur Ghât et les Touaregs de l'Aïr.* Trad. H. Schirmer, Paris, 1898.

(3) L. Gentil, *Études des roches* in Foureau, *Doc. sc. Miss. Sah.*, Paris, 1905, p. 716 à 717 et 727.

(4) F. Foureau, *Ibid.*, p. 625-645.

(5) R. Chudeau, *Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 83.

(6) M.-E. Denaeyer, *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1073 et 1161.

(7) R. Chudeau, *La Géographie*, t. 15, Paris, 1907, pl. IV. — *Sahara Soudanais*, Paris, 1909, p. 56-64.

Mais ce sont les orthogneiss qui dominent dans la composition de la pénéplaine. Ils se présentent partout avec des caractères à peu près constants. Le quartz a recristallisé en prenant une structure granoblastique. Les feldspaths sont très variés : microcline, orthose et toute la série des plagioclases. On y reconnaît souvent un noyau basique farci d'inclusions, entouré d'une large couronne de plagioclase néogène. Parmi les minéraux colorés, le sphène est abondant et caractéristique. Il existe, de plus, de l'épidote fréquemment pourvue d'un noyau central d'allanite. Dans la crête du Mont Aohrsane coexiste avec le type précédent un gneiss syénitique quartzifère. La hornblende de ces gneiss est parfois un peu spéciale; elle est verte, mais avec une teinte bleuâtre suivant l'axe *c*; de plus, sa biréfringence est faible, l'angle d'extinction est grand (30°) et l'angle des axes optiques ne dépasse pas 50 à 55°. Ce n'est sans doute qu'un produit d'ouralitisation, avec séparation d'épidote et parfois de calcite, d'un diallage dont quelques préparations montrent des traces bien conservées. Ces roches auraient été, à l'origine, des gneiss à pyroxène. M. L. Gentil a d'ailleurs décrit un gneiss à augite dans l'Aïr ([1]) et d'autre part nous allons retrouver du pyroxène à l'état d'enclaves dans les labradorites d'Iférouane décrites plus bas.

Les roches d'épanchement présentent un intérêt plus vif. A côté de rhyolites banales, il faut signaler à nouveau la rhyolite à ægyrine et riebeckite de l'oued Asoday que Chudeau avait déjà fait connaître ([2]). Cette lave doit être classée parmi les comendites. Un trachyte et une phonolite ægyrinique provenant d'Aoudéras ont été jadis décrites par M. Gentil ([3]). R. Chudeau a trouvé au même endroit un trachyte phonolitique contenant de l'ægyrine aciculaire et de la biotite disséminées dans la pâte formée de sanidine et de néphéline (tinguaïte). Ces roches se distinguent par leur richesse en soude et leur pauvreté en chaux et en magnésie. On sait que ce caractère est commun à plusieurs roches sahariennes ([4]).

Quelques labradorites ont été récoltées à Iférouane. Il faut y distinguer deux générations. L'une est une labradorite ancienne à amphibole et biotite. Les autres paraissent relativement récentes et renferment de nombreuses enclaves énallogènes quartzofeldspathiques. Les éléments de la

---

([1]) L. Gentil, *loc. cit.*, p. 717.

([2]) R. Chudeau, *Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 83.

([3]) L. Gentil, *loc. cit.*, p. 717.

([4]) M.-E. Denaeyer, *Les roches alcalines du Sahara central* (*C. R.*, *Congrès des Sociétés savantes*, Paris, 1923).

pâte se détachent sur un fond confus d'amphibole et de biotite. Les éléments de la roche enclavée s'y trouvent éparpillés. On y reconnaît du zircon intact, du quartz frité avec sa couronne habituelle d'augite verdâtre, des feldspaths divers (anorthose, albite, labrador) fondus sur les bords avec obscurcissement périphérique ou total, ou bien montrant le stade plus avancé de la fusion et de la démolition rectangulaire; enfin, des prismes d'un pyroxène incolore, profondément résorbés avec séparation de magnétite. Tous les éléments de ces enclaves ont probablement été arrachés au gneiss sous-jacent qui présente la même diversité de feldspaths.

Au nord d'Aourarène on trouve une roche qui a l'aspect d'un basalte scoriacé. C'est, en réalité, un basanitoïde. En effet, entre les éléments de la pâte apparaît une matière incolore, isotrope, qui est soit un verre sodique, soit de l'analcime. Ce type pétrographique est à rapprocher du « basalte limburgitique » de la cuvette de Tihodayène (Tassili des Azdger) et du confluent des oueds Afara et Affattakha (Adrar), ainsi que des « téphrites limburgitiques » des collines de Tidjidi (Adrar) [1]. Toutes ces roches sont à silice légèrement déficitaire, de même que la tinguaïte d'Aoudéras.

Les schistes cristallins sont, dans l'Aïr comme dans tout le Sahara, fréquemment traversés par des venues de roches filoniennes parmi lesquelles mérite d'être signalé un basalte holocristallin à structure ophitique, recueilli dans l'oued Kademellet et déjà mentionné par R. Chudeau. Les phénocristaux sont remarquables : autour d'un noyau central de plagioclase basique est venu s'orienter secondairement un plagioclase plus acide, qui est lui-même bordé par de l'orthose. Une ligne d'inclusions sépare le feldspath ancien du feldspath néogène. L'orthose forme, de plus, un fin liséré autour des microlites. Le microscope ne décèle pas de néphéline entre les feldspaths, bien que sa présence en très petite quantité soit possible, ainsi qu'en témoigne l'analyse microchimique, dans ce cas la roche serait une forme de passage aux luscladites [2].

---

(1) L. Gentil, *loc cit.*, p. 705 et 709-711, pl. II.

(2) A. Lacroix, *Minéralogie de Madagascar*, t. 2, Paris, 1922, p. 635.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur les anomalies du magnétisme terrestre et de la gravité dans le gouvernement de Koursk (Russie).* Note de M. P. **Lasareff**, présentée par M. Louis Gentil.

Smirnov le premier, a, vers l'année 1875, attiré l'attention sur les anomalies magnétiques de Koursk. Ces anomalies ont ensuite été étudiées par Pilstchikov, Sergievsky, Rodd et le géophysicien français Moureaux, invité par la Société Impériale de Géographie à prendre part à ces travaux (1896). Ces recherches n'ont cependant pas fourni d'éléments suffisants pour dresser des cartes d'éléments magnétiques (isolignes D, I, H).

Dans ce but, Leyst a entrepris l'étude systématique des anomalies magnétiques de Koursk, mais sa mort inopportune en Allemagne (1918) a soustrait tous ses documents à la science russe.

J'ai alors exposé, à l'Académie des Sciences de Russie, l'état de la question et, à la suite de cette communication, une commission spéciale a été nommée, dont j'ai l'honneur d'assumer la présidence, pour diriger des travaux magnétiques, gravimétriques et géodésiques dans le gouvernement de Koursk.

Il s'agissait d'explorer deux bandes de terrain où des anomalies avaient été signalées; l'une qui traverse en écharpe dans la direction NO-SE la partie septentrionale et l'autre, à peu près parallèle, la partie méridionale du gouvernement de Koursk ; ces bandes sont séparées par un champ d'anomalies faibles sur une largeur d'environ 60^{km}.

Malgré des conditions très défavorables, inhérentes à la situation intérieure du pays, des mesures ont été faites dans la bande nord où, par une méthode spéciale, nous avons obtenu les valeurs de D, H et Z (V) de 10500 stations, avec une approximation de 0,5 à 1 pour 100 [1].

Pour obtenir cette précision il était indispensable, comme je l'avais démontré, d'avoir des cartes à grande échelle, au 40000e environ, ce qui nécessitait un réseau géodésique de précision qui a été jeté sur la bande septentrionale de Koursk.

Les travaux de la Commission situent la bande septentrionale entre le

---

(1) Voir à ce sujet P. Lasareff, *L'anomalie magnétique dans le gouvernement de Koursk* (*Annexe aux Procès-Verbaux de l'Académie des Sciences de Russie*, 1921).

Les travaux ont été exécutés par MM. Iurkevitch, Zaborowsky, Ovod, Janowsky, Kruschinin, Jakovlev, Beliajev, Gengolowic, Musiatovic, Riabinin.

district de Dmitrowsk, dans le gouvernement d'Orel et le district Stary Oskol, à la limite du gouvernement de Voronège. La largeur de la zone anomale est comprise entre 2^{km} (Stschigry) et 40^{km} (St. Oskol); sa longueur atteint 250^{km}. Le passage des anomalies fortes aux anomalies faibles se fait brusquement.

On peut déduire, d'après toutes les mesures effectuées sur les anomalies magnétiques de ces régions, les conclusions suivantes :

Suivant une série de profils transversaux des isolignes, on constate l'existence de maxima Z_m qui sont échelonnés sur ce que nous avons appelé *la ligne axiale de l'anomalie* (L. A.).

La composante verticale Z est variable tout le long de cette ligne axiale montrant plusieurs maxima dont deux, très élevés ($Z = 2,0$ unités C. G. S.), se manifestent vers le milieu (Stschigry) et à l'extrémité sud (St. Oskol) de la bande anomale.

En franchissant, du Sud-Ouest vers le Nord-Est la ligne axiale de l'anomalie, on passe brusquement de la déclinaison Est à la déclinaison Ouest.

Enfin, les valeurs minima de H avoisinent la ligne axiale et les composantes horizontales anomales H_a sont dirigées vers cette même ligne.

J'ai recherché la cause de ces anomalies et j'ai dû renoncer à envisager l'existence de courants telluriques pour m'arrêter à cette conclusion qu'il existe en profondeur de puissants gîtes de fer magnétique.

Pour contrôler cette conclusion, j'ai d'abord fait exécuter des levés du champ de gravité dans les districts de Stschigry et de St. Oskol, par la méthode du pendule de Stückrat et du varimètre d'Eötvös [1].

Ces mesures montrent que les variations des maxima Z et de la gravité g ne coïncident pas nécessairement, d'où l'on peut conclure que les causes des anomalies du magnétisme et de la gravité ne sont pas les mêmes.

A la suite de tous ces travaux scientifiques, il a paru très intéressant d'entreprendre une série de forages pour déceler, en profondeur, la présence soupçonnée de gîtes de magnétite. Une commission spéciale a été désignée à ce sujet [2] qui comprenait à la fois des géophysiciens, des géologues et des ingénieurs.

Ces forages ont montré qu'il existe, à une profondeur de 150^m environ,

---

(1) Ces travaux furent exécutés par MM. Aksenov, Nikiforov et Michaïlov.

(2) Cette commission comprend un grand nombre de savants russes parmi lesquels : MM. S. Goubkin (président), P. Lasareff, chef des travaux géodésiques, magnétiques et gravimétriques (vice-président), A. Archangelsky, chef des travaux géologiques, A. Himmelfarb, ingénieur en chef des travaux de forage.

des amas de magnétite en relation avec des quartzites inclinés à 70°. Ce minerai, dont la puissance a été reconnue jusqu'ici sur une hauteur verticale de 114^{m}, est impur à la surface, avec une densité de 3,8 et une teneur en fer métallique de 40 pour 100; mais il s'enrichit plus profondément.

Ainsi la preuve est faite de l'existence de gîtes de magnétite sous les couches horizontales du Dévonien, du Jurassique, du Crétacé et du Tertiaire de la plate-forme russe, dans le gouvernement de Koursk. Et si l'on songe aux immenses surfaces où la boussole accuse des anomalies magnétiques, on se fait une idée de l'énorme masse de magnétite qui doit exister dans cette partie de la Russie. Les gîtes similaires de la presqu'île scandinave sont minimes à côté de ceux du gouvernement de Koursk qui devront figurer parmi les plus grandes richesses métalliques du monde.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Salicacées. Développement de l'embryon chez le* Salix triandra *L.* Note de M. **René Souèges**, présentée par M. Léon Guignard.

Les espèces qui ont été déjà examinées, au point de vue embryogénétique, chez trois familles de la sous-classe des Apétales, les Polygonacées [1] les Chénopodiacées [2] et les Urticacées [3], ont permis d'établir trois types de développement bien distincts. L'étude des processus de segmentation chez le *Salix triandra* n'a pas révélé de différences essentielles nouvelles; elle a au contraire montré que les Salicacées offrent avec les Polygonacées les analogies les plus intéressantes. Chez le *Salix triandra*, le proembryon s'édifie de la même manière que chez la Persicaire ou les *Rumex* et les étages qui le constituent possèdent des destinées identiques.

Les figures 1 à 3 permettent d'assister à la construction d'une tétrade comprenant deux cellules supérieures juxtaposées et deux cellules inférieures superposées; cette tétrade, par bipartition de chacun de ses éléments, engendre un proembryon octocellulaire (*fig.* 4 à 6); celui-ci à son tour, par division des huit cellules qui le composent, donne naissance à un proembryon à seize cellules (*fig* 7 à 11). Les directions des seg-

(1) R. Souèges, *Recherches sur l'embryogénie des Polygonacées* (*Bull. Soc. bot. de France*, t. 66, 1919, p. 168; t. 67, 1920, p. 1 et 75).

(2) R. Souèges, *Développement de l'embryon chez le* Chenopodium Bonus-Henricus *L.* (*Bull. Soc. bot. de France*, t. 67, 1920, p. 233).

(3) R. Souèges, *Développement de l'embryon chez l'*Urtica pilulifera *L.* (*Bull. Soc. bot. de France*, t. 68, 1921, p. 172 et 280).

mentations, au cours de l'édification de ces formes proembryonnaires, sont en tous points conformes à celles qui ont été décrites au sujet du *Polygonum Persicaria*. Le proembryon à seize cellules est divisé en six étages, *l*, *l'*, *m*, *n*, *o*, et *p*. Les destinées de ces étages sont encore celles qui ont été indiquées à propos des Polygonacées : *l* représente la partie cotylée; *l'* correspond à la partie supérieure de l'axe hypoco-

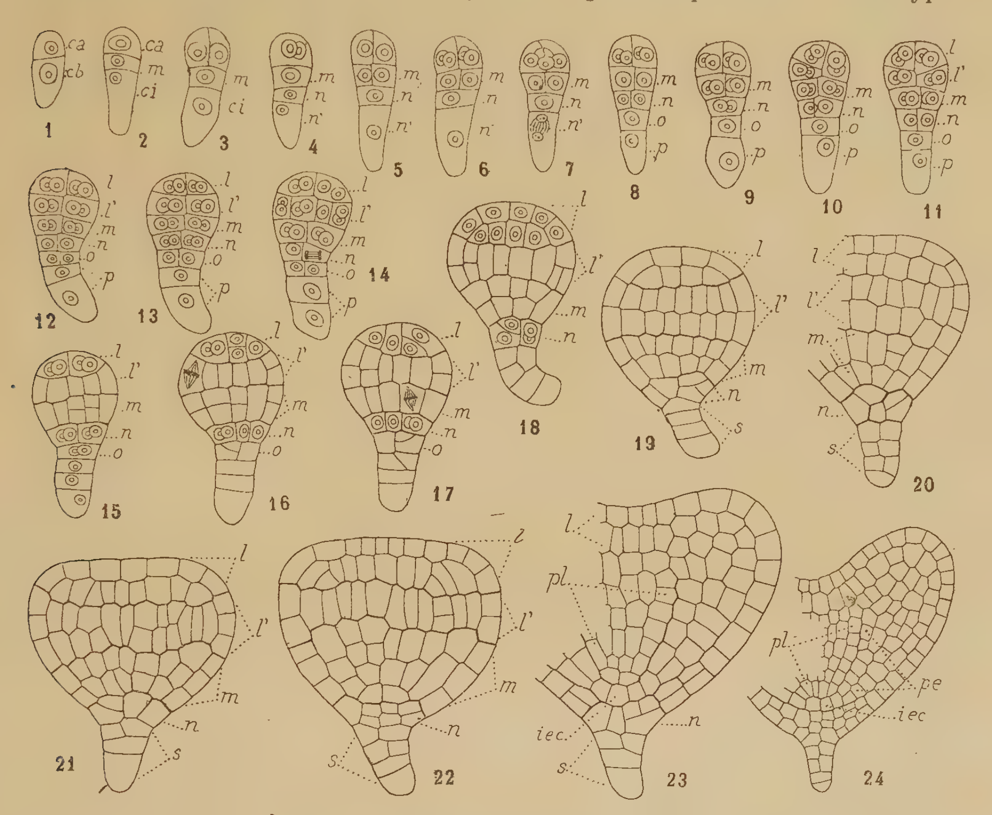


Fig. 1 à 24. — *Salix triandra* L. — Les principales étapes du développement de l'embryon. *ca* et *cb*, cellule apicale et cellule basale du proembryon bicellulaire; *m* et *ci*, cellules-filles de *cb* ou cellule intermédiaire et cellule inférieure de la tétrade; *n* et *n'*, cellules-filles de *ci*; *o* et *p*, cellules-filles de *n'*; *l*, *l'*, *m*, *n*, *o* et *p*, les six étages du proembryon; *s*, suspenseur; *pe*, périblème; *pl*, plérome; *iec*, initiales de l'écorce au sommet radiculaire. G. = 420; 210 pour la figure 24.

tylé; *m* engendre la partie inférieure de ce même axe et les initiales du cylindre central et de l'écorce au sommet radiculaire; la portion médiane de la coiffe tire son origine de *n*; enfin aux dépens de *o* et de *p* se développe un court suspenseur.

D'une manière générale, les quatre éléments de l'étage supérieur, *l*, se segmentent selon les règles qui ont été exposées à propos du *Myosurus minimus* (1). Il se forme

(1) R. Souèges, *Recherches sur l'embryogénie des Renonculacées* (*Bull. Soc. bot. de France*, t. 58, 8 décembre 1911, p. 720).

d'abord des parois verticales rectangulaires, parallèles aux deux parois méridiennes, séparant, au voisinage de l'axe, une cellule d'aspect quadrilatère et, vers la périphérie, deux cellules d'aspect triangulaire (*fig.* 16, 17). Ces nouveaux éléments se cloisonnent ensuite tangentiellement pour engendrer vers l'extérieur les premières cellules de dermatogène. Les éléments sous-épidermiques se multiplient par segmentations verticales : ceux qui restent adjacents à l'axe peuvent être considérés comme les cellules initiales de l'écorce au sommet de la stèle ; les autres donnent naissance aux méristèmes internes cotylédonaires. Dans certains cas, le méristème vasculaire et le méristème cortical externes du cotylédon paraissent provenir de l'étage *l'*. Quelquefois (*fig.* 17, à droite), les premières cloisons, dans les éléments de l'étage *l*, se disposent d'emblée tangentiellement.

Dans les étages *l'* et *m*, les parois de segmentation sont tout d'abord verticales (*fig.* 14, 15) ; les éléments périphériques qui s'individualisent à cette période représentent les premières cellules du dermatogène (*fig.* 16 à 19). Apparaissent ensuite des cloisons transversales divisant les deux étages en deux assises cellulaires très nettes (*fig.* 15 à 19) ; c'est à partir de ce moment que se produit la dépression apicale indiquant la naissance prochaine des cotylédons (*fig.* 20 à 22) ; les limites des deux étages à ce même moment ne peuvent se distinguer avec certitude ; le périblème et le plérome ne se montrent nettement différenciés que lorsque les cotylédons sont déjà en voie de croissance (*fig.* 23, 24).

Les deux éléments qui représentent l'étage *n* dans le proembryon à seize cellules (*fig.* 11), par segmentations méridiennes, donnent quatre cellules circumaxiales (*fig.* 12 à 15). Celles-ci peuvent ensuite se cloisonner verticalement (*fig.* 16, 17) ou bien tangentiellement (*fig.* 18). Aux parois verticales succèdent plus tard (*fig.* 22) des cloisons tangentielles qui divisent l'étage *n* tout entier en deux assises : l'assise supérieure représente le rudiment de l'assise calyptrogène, l'assise inférieure, avec les éléments les plus voisins du suspenseur, donne naissance à la portion extérieure de la coiffe (*fig.* 24).

Comme on le voit, les lois de l'embryogenèse sont, dans leurs traits essentiels, identiques chez le *Salix triandra* et chez les Polygonacées qui ont été précédemment examinées. Ces profondes analogies pourront peut-être servir à déterminer les caractères embryogénétiques fondamentaux du groupe des Apétales et, par le fait même, à dégager les véritables origines de cette sous-classe des Dicotylédones que l'on considère généralement comme la plus ancienne.

En 1897, Chamberlain [1] a étudié le développement de l'embryon chez les *Salix*. Quoique la plupart des observations et des figures de l'auteur soient exactes, il n'a pas suivi d'assez près la marche des segmen-

---

[1] Ch.-J. Chamberlain, *Contribution to life history of* Salix (*Bot. Gazette*, t. 23, 1897, p. 147).

tations pour pouvoir établir quel type de développement, bien différent de celui du *Capsella Bursa-pastoris*, représente l'embryon des *Salix*.

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Le rougeau de la vigne*. Note de MM. L. **Ravaz** et G. **Verge**, présentée par M. Pierre Viala.

Le rougeau de la vigne se déclare tantôt sur une partie tantôt sur la totalité du feuillage. Dans le premier cas, il est le plus souvent produit par des causes agissant localement telles que cassure, annelation faites par l'homme ou par les insectes, ligature avec fil de fer, ficelle, vrille, etc., coupant ou ralentissant les communications entre la partie de l'écorce placée au-dessus et la partie placée au-dessous de la blessure. Quand il porte sur tout l'ensemble du feuillage et des rameaux, il est encore parfois lié à de larges incisions ou à des ligatures. Ces cas, très fréquents, et en somme purement accidentels, sont dispersés sans ordre dans les vignobles.

Le plus souvent, les souches atteintes sont groupées en nombre plus ou moins considérable. Elles forment tache et le caractère accidentel disparaît. L'examen des tissus malades met en évidence les symptômes suivants : Les rameaux ne s'aoûtent point; l'écorce du tronc s'accroît irrégulièrement en épaisseur, lentement ici, plus vite à côté, de sorte que la tige paraît irrégulièrement cannelée. La plupart des racines ont une couleur rougeâtre. Dans l'écorce, les tissus libériens sont altérés en beaucoup d'endroits et sur une étendue parfois importante. Dans le bois beaucoup de fibres ligneuses brunies ou jaunes. Ce qui est aussi très constant dans les racines et dans la tige, c'est la non-différenciation des tissus libériens ; pas ou presque pas de fibres libériennes; les vaisseaux criblés ne se distinguent pas des autres éléments corticaux ; il s'agit en quelque sorte de tissus arrêtés de bonne heure dans leur transformation.

Ces cas de rougeau se présentent dans les terres basses compactes ou retenant l'eau à l'automne, c'est-à-dire dans les terres mal aérées. Ils peuvent être reproduits expérimentalement avec la même gravité. Si l'on cultive dans des pots maintenus pleins d'eau courante, c'est-à-dire renouvelée d'une manière continue, les racines s'accroissent, se multiplient et restent bien vivantes, le rougeau n'apparaît pas. Si, au contraire, l'eau est maintenue stagnante, les racines ne s'accroissent pas, beaucoup d'entre elles meurent en se colorant de rouge brun et le rougeau apparait. A cet arrêt de la croissance des racines correspond aussi un arrêt de la croissance des rameaux.

Si, après que les feuilles ont rougi, on supprime l'eau stagnante, les racines se forment à nouveau, de nouvelles feuilles se développent et le rougeau disparait, même sur les anciennes feuilles.

Dans le cas du rougeau accidentel dû à une incision quelconque, il y a, dans les feuilles qui rougissent, ainsi qu'en témoignent les analyses faites par MM. Ravaz et Roos ([1]), excès de matières hydrocarbonées, amidon et sucre, l'indice cryoscopique y est aussi plus élevé (1,34 contre 0,90). Il semble donc qu'il y a chez ces feuilles réduction de la consommation par rapport à la production. S'il en est ainsi, toutes les causes qui réduisent la première sans modifier la seconde doivent faire apparaître le rougeau ; c'est le cas de l'asphyxie des racines par l'eau ou par le sol ; et toutes celles qui la favorisent l'empêchent d'apparaître, cas des vignes à végétation très active. Exemple : Des plants de vignes élevés en pot sont maintenus en serre le jour à température élevée et, la nuit, dehors, à température de quelques degrés au-dessus de zéro, ils ne poussent pas et rougissent ; les témoins maintenus constamment en serre ne rougissent pas. On met à nouveau les premiers en serre jour et nuit, ils repoussent et perdent leur coloration rouge.

Cela explique les variations de l'intensité de la couleur rouge de nos vignobles à l'automne. Les souches faibles qui cessent de croître de très bonne heure laissent aussi émigrer de bonne heure le contenu des tissus des feuilles, ne rougissent pas ; celles dont le feuillage s'est maintenu actif un peu plus longtemps rougissent, et celles qui continuent à former de nouvelles feuilles, c'est-à-dire des organes de dépenses, restent vertes. Les mêmes phénomènes se passent chez d'autres végétaux des parcs ou des forêts.

Pour éviter cette maladie, qui est ainsi parfois un phénomène quasi normal, il doit donc suffire d'aérer le sol, soit en enlevant l'excès d'eau par des drains, soit par des tunnels en fascines, comme du reste on opérait autrefois dans les vignes établies en terrain argileux et humide. Cette année ayant été très sèche, les vignes n'ont pas rougi.

ANTHROPOLOGIE PRÉHISTORIQUE. — *Un nouveau procédé de trépanation préhistorique, à rondelles circulaire ou ovale, découpées au silex.* Note de M. **Marcel Baudouin**, présentée par M. Charles Richet.

Au cours d'expérimentations récentes, pour l'étude des trépanations néolithiques avec obtention de rondelles craniennes, de forme circulaire

([1]) *Comptes rendus*, 1905.

ou ovalaire, percées d'un ou deux trous, j'ai eu l'idée d'essayer un manuel opératoire, qui, jusqu'à présent, n'a encore été signalé par personne, ni par des anthropologistes comme P. Broca, ni par des chirurgiens fort compétents, comme Lucas-Championnière.

Il consiste, après avoir exécuté, soit un seul, soit deux trous, très voisins, dans la paroi cranienne, par le procédé du *perçage* au perçoir en silex, utilisé jadis par les Péruviens de l'âge du cuivre, et expérimenté par Lucas-Championnière, à utiliser un *double perçoir*, ou plutôt un *perçoir-burin*, en silex, en forme de *compas*, à ouverture fixe bien entendu.

Ces doubles perçoirs existent d'ailleurs au Néolithique; et l'on en trouve dans les gisements du Néolithique moyen surtout. J'en possède de très grands.

Pour l'expérimentation, il faut en fabriquer une série d'avance, avec du silex moderne, bien choisi : ce qui est aisé pour un préhistorien familier avec la technologie.

L'écart entre le perçoir et le burin peut être de 2^{cm} à 3^{cm}, ce qui représentera le rayon de la circonférence, si l'on opère avec un seul trou comme centre; ou le grand rayon de l'ellipse, si l'on a fait deux trous voisins, pour obtenir un *ovale*, plus ou moins marqué.

On place la pointe du perçoir dans l'un des trous; et avec l'autre, correspondant à un *burin*, très-fort et très coupant, on trace des demi-circonférences, en appuyant fortement sur le crâne.

Le burin attaque le tissu osseux, et pénètre, avec facilité, quand l'instrument est assez gros et bien en main; et, ainsi, on délimite rapidement une *rondelle* (à un ou deux trous), soit circulaire, soit ovale, suivant les cas.

Plus la rondelle est grande, plus le travail est aisé; et ainsi peuvent s'expliquer les très vastes trépanations de la Pierre polie, déjà découvertes, sujets d'étonnements perpétuels.

Le grand avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne un *point d'appui sur le crâne*, par l'intermédiaire de la pointe du perçoir engagée dans le trou préalablement percé pour la recevoir.

La main, que le burinage fatigue beaucoup, quand elle est libre et non appuyée, a bien plus de force, dans ces conditions, sur l'autre pointe, dite burin, qui entaille l'os ainsi, puis décolle la fibre osseuse de celle sous-jacente. Le principal est d'avoir un outil bien aigu et solide et de le remplacer par un second, préparé à l'avance [1] dès qu'il est émoussé.

---

(1) Rien n'est plus facile que de se fabriquer ces outils avec des lames de silex un

C'est là une combinaison des procédés dits de *perçage* et de *burinage*, le burinage donnant les rainures *carrées* des Péruviens ou *courbes* des Néolithiques de France : c'est l'ancêtre de la couronne de Trépan.

Mais le *burinage au compas* est bien plus pratique et aussi vite que celui au burin seul ou au couteau très tranchant! — Pour se rendre compte de ces choses, il est nécessaire d'avoir pratiqué soi-même, d'avoir appris à tailler le silex et à faire ses instruments; d'avoir trépané des crânes à os très dur, à diverses reprises. — C'est ainsi que le « perçage » est très difficile au début, tant qu'on n'a pas obtenu un petit orifice de 3^{mm} à 5^{mm} de diamètre! C'est ainsi que, pour le burinage, il ne faut se servir d'abord que de burins petits ou de couteaux très tranchants, et que, pour le grattage, il faut des os assez tendres..., sans cela la plus grande patience serait de rigueur!

En réalité, il faut au moins, avec les procédés connus, une heure et demie pour trépaner au silex et obtenir un orifice de quelques centimètres de diamètre. Mais, avec le « burin au compas », quand l'outil est bon, il semble que l'ouverture du crâne soit bien plus nette, plus conforme aux trouvailles faites, plus aisée et plus rapide qu'avec les autres méthodes déjà expérimentées.

PHYSIOLOGIE. — *Influence de la cuisson des aliments sur le développement de la limace agreste.* Note de M. **H. Cardot**, présentée par M. Charles Richet.

L'influence de la cuisson des aliments sur le développement des organismes a fait l'objet dans ces dernières années de très nombreux travaux qui se rattachent à l'histoire des vitamines et des facteurs de croissance. Récemment, Charles Richet, rappelant et complétant des expériences qu'il avait faites autrefois, a insisté avec raison sur l'action généralement défavorable qu'exerce sur l'être vivant une ration entièrement formée d'aliments cuits.

A l'occasion d'autres recherches, nous avons eu à plusieurs reprises depuis quatre ans la possibilité de constater l'influence exercée par la cuisson de la

---

peu épaisses débitées au percuteur ordinaire, arrondi de façon à avoir des pointes épaisses.

Avec un autre percuteur *à pointe* saillante, on dessine une *encoche*, entre le coin qui doit faire le perçoir et celui qui correspond au futur burin; l'arc de cette concavité doit constituer le rayon de la courbure voulue pour la rondelle cranienne à obtenir.

nourriture sur *Agriolimax agrestis*, et nous croyons intéressant de donner ici nos résultats, parce qu'ils montrent que cette influence peut nettement être mise en évidence dans trois phases successives du développement.

Dans tous les cas, la nourriture était composée de carottes et de pommes de terre, et les animaux des différents lots, conservés au laboratoire dans des conditions identiques, recevaient ces légumes, soit crus, soit cuits à l'autoclave à 110° pendant 10 minutes.

Pour les limaces adultes, la cuisson de l'aliment exerce un effet léger et constant sur la courbe pondérale, mais non sur la durée de la survie en captivité. Dans tous les cas, après la capture, l'animal bien nourri a notablement augmenté de poids jusqu'à la ponte; mais dans cette première période qui correspond à la formation des œufs, l'augmentation de poids est plus rapide et plus marquée chez les individus nourris de légumes cuits que chez les autres (voir Tableau, 2e et 3e colonnes). Ensuite, pendant toute la durée de la ponte, le poids diminue graduellement et revient au poids initial à peu près en même temps pour les deux lots d'animaux, c'est-à-dire vers la fin de la période de ponte. Peu après la ponte, la plupart des limaces meurent, après avoir continué à diminuer peu à peu de poids; et l'amaigrissement dans cette dernière période est plus marqué pour ceux qui ont reçu les aliments crus que pour les autres, bien que la mort les frappe en moyenne à peu près en même temps : les premiers meurent avec un poids égal à 65 pour 100 du poids initial, et les seconds avec un poids égal à 87 pour 100 (moyennes de deux séries de 16 animaux).

L'influence de la nourriture cuite se manifeste encore à un autre point de vue. Il y a en effet dans ce cas une accélération indéniable dans le dépôt des œufs dès le début de la période de ponte. Par contre, la ponte s'arrête beaucoup plus vite et le nombre total d'œufs pondus ne dépasse guère les deux tiers du nombre qui correspond aux animaux recevant les légumes crus. Dans le Tableau suivant (4e et 5e colonnes) nous avons totalisé les œufs pondus par individu dans chacun des deux lots aux divers moments de l'expérience et nous indiquons également les variations de poids des animaux pendant toute cette période (2e et 3e colonnes).

D'autre part nous avons tenté, toujours avec la même alimentation, crue ou cuite, d'élever les jeunes limaces prises au moment de l'éclosion. L'expérience a été faite avec des jeunes provenant de parents nourris avec les légumes crus.

Jours.	Poids des adultes (¹) avec alimentation crue.	cuite.	Ponte moyenne avec alimentation crue.	cuite.	Poids des jeunes avec alimentation crue.	cuite.
					mg.	mg.
0	100	100	0	0	3,2	3,3
1	115	130	0	0	"	"
2	122	143	2	0	3,4	4,1
3	125	137	"	0	"	"
4	126	132	"	0	3,5	4,5
5	128	132	"	0	"	"
6	126	124	5,3	13	3,6	4,8
7	130	125	"	"	"	"
8	124	123	"	"	3,7	"
9	122	119	"	"	3,8	4,6
10	122	115	12	35	3,9	"
11	119	113	"	"	"	"
12	117	111	"	43	4	"
13	119	114	"	"	4,1	"
14	119	115	26	50	"	"
15	116	112	"	"	3,9	5,4
16	112	108	35	"	"	"
17	"	"	"	"	4,2	4,8
18	107	107	"	58,5	"	"
20	101	110	52	62,5	5	4,5
22	107	102	61	"	5,4	"
24	105	102	70	"	"	"
25	"	"	"	"	5,5	4,7
26	100	103	"	"	"	"
28	96	97	"	"	6,8	5
30	89	98	82	"	6,0	"
32	83	93	85	"	"	"
34	80	92	"	"	"	"
36	73	86	"	"	"	"
38	66	87	"	"	"	"
40	64	87	"	"	"	"

22 de ces petites limaces ont reçu des pommes de terre et des carottes crues, et 16 les mêmes légumes cuits. Ici encore, la cuisson semble exercer une action nette.

Pour la durée de la survie des jeunes, les résultats sont les suivants : 1° avec les aliments crus, survie moyenne de 24 jours, survie maximum

(¹) En pour 100 du poids initial.

de 32; 2° avec les aliments cuits, survie moyenne de 16 jours, survie maximum de 30. Le maximum de poids observé dans le cas individuel le plus favorable a été de 17^{mg} dans le premier lot et de 6^{mg} dans le second. Mais c'est surtout l'évolution du poids moyen des animaux dans les deux lots qu'il est intéressant de suivre de l'éclosion à la mort (6e et 7e colonnes).

On voit qu'au début la croissance des jeunes recevant les aliments cuits est accélérée par rapport aux limaces de l'autre lot, mais qu'en revanche elle s'arrête beaucoup plus tôt. L'analogie est assez frappante entre cet effet et celui qui a été observé chez l'adulte pour la ponte et pour l'augmentation de poids qui la précède. Pour la formation des œufs, comme pour la croissance des jeunes, l'influence considérée semble avoir la même importance.

En résumé, chez l'adulte comme chez le jeune, initialement, l'aliment cuit semble favorable. Cela peut s'expliquer peut-être par des raisons mécaniques, l'animal ayant la possibilité, pour un même travail de mastication, d'ingérer une plus grande quantité de légumes cuits que de crus. Secondairement, la formation des œufs ou des tissus du jeune est entravée par l'absence dans l'aliment cuit d'un facteur indispensable à la croissance.

BIOLOGIE. — *Sur la structure histologique d'un organe de nature testiculaire développée spontanément chez une Poule ovariotomisée.* Note (1) de M. **Jacques Benoit.**

J'ai signalé dernièrement dans ces *Comptes rendus* le cas d'une Poule Leghorn blanc qui, castrée à gauche à l'âge de 26 jours, commença dès le quatrième mois à présenter les signes d'une masculinisation typique : à 6 mois sa crête était aussi rouge et aussi grande qne celle d'un Coq témoin. Un organe s'était développé spontanément à l'emplacement de la gonade droite. Il fut enlevé au cours d'une deuxième opération, et la crête régressa très rapidement : elle est aujourd'hui identique à celle d'un Coq castré. Cet organe trouvé à droite tenait donc sous sa dépendance le développement inaccoutumé de la crête. Je veux dans cette Note indiquer brièvement sa structure histologique.

Une coupe de cet organe examinée à un grossissement moyen présente à l'observation deux sortes de régions : les unes contiennent des tubes volumineux, séparés par un tissu conjonctif rare, et les autres, des tubes

(1) Séance du 19 novembre 1923.

plus petits, des cordons cellulaires et des cellules isolées, plongés dans un tissu conjonctif abondant. Les tubes volumineux sont des tubes séminifères, qui contiennent tous les éléments de la lignée séminale : les cellules de Sertoli, les spermatogonies et les spermatocytes paraissent être normaux. Mais les spermatides, nombreuses, présentent une évolution atypique. Leurs noyaux sont de taille inégale et la plupart d'entre eux se pycnosent. On voit bien dans quelques tubes, à côté de ces noyaux



Fig. 1. — A droite, la poule témoin. Crête : 29^{mm},5. A gauche, la poule castrée à 26 jours. Remarquer le développement des organes érectiles. Crête : 77^{mm}. (Les deux sujets sont âgés de 6 mois 8 jours.)

pycnosés, des spermatozoïdes reconnaissables à leur tête allongée et à leur filament caudal. Mais la tête de ces spermatozoïdes, falciforme, paraît arrêtée dans son développement. En somme, la spermatogenèse semble débuter normalement, mais il est probable qu'il existe des perturbations dans son évolution, puisqu'elle aboutit à des produits anormaux.

A côté de ces régions qui renferment des tubes séminifères bien développés, on en voit d'autres qui présentent un aspect cahotique : dans un tissu conjonctif abondant se trouvent quelques tubes irréguliers de faible calibre, et un grand nombre de cordons cellulaires de forme et d'orientation absolument quelconques. Les cellules qui les constituent possèdent souvent

des noyaux leptotènes, synaptènes et pachytènes. Ce sont des cellules sexuelles qui commencent l'évolution spermatogénétique. Quelques-uns de ces cordons ou tubes cellulaires sont constitués exclusivement par des cellules de Sertoli adultes. D'autres commencent à se développer et à prendre la structure des tubes séminifères.

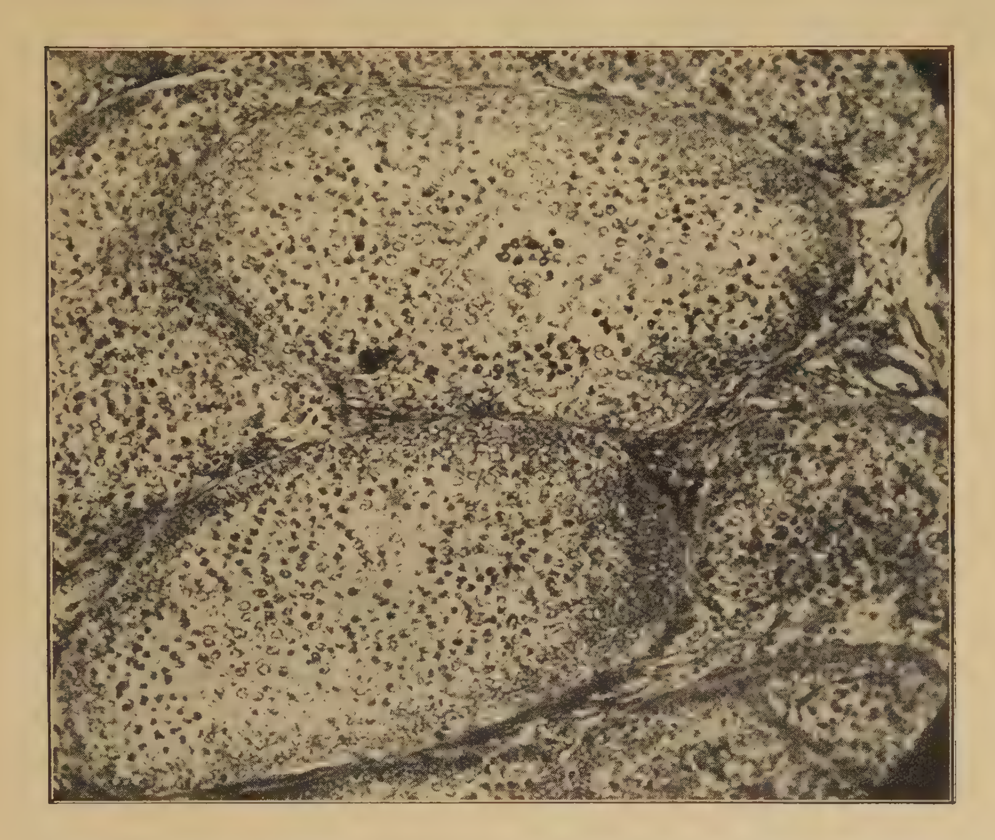


Fig. 2. — Photographie d'une coupe de glande testiculaire développée à droite chez la poule castrée à gauche, tubes séminifères bien développés. (Grossissement : 200 diamètres.)

J'ajoute que je n'ai vu nulle part dans l'organe étudié de cellules ou de formations du type ovarien. Partout les éléments cellulaires sont du type sexuel mâle.

Cet organe de structure testiculaire possède une autre catégorie d'éléments cellulaires : on voit entre les tubes séminifères bien développés des cellules interstitielles identiques à celles d'un testicule normal [1]. Mais à

[1] *Sur les cellules interstitielles du testicule du Coq domestique. Évolution et structure* (*C. R. Soc. Biol.*, 1922, p. 1382).

côté de ce type bien caractérisé, on voit des cellules qui prennent insensiblement l'aspect des cellules interstitielles; celles-ci sont groupées en amas limités par une membrane propre, ou sont contenues dans des tubes sexuels ou encore sont isolées dans le tissu conjonctif. Sans vouloir entrer dans trop de détails, je dirai qu'on observe tous les stades de transition entre certaines cellules (probablement des cellules jeunes de type sertolien) contenues dans les tubes sexuels et les cellules interstitielles. Il semble qu'on assiste à une transformation analogue à celle que j'ai décrite dans le testicule embryonnaire ([1]), avec cette différence qu'ici la cellule intratubulaire qui se transforme prend d'emblée la structure de la cellule interstitielle adulte.

Ainsi donc un organe possédant une structure testiculaire et sécrétant une hormone mâle s'est développé chez une Poule ovariotomisée, à l'emplacement de la gonade droite. J'ai donné dans une Communication précédente les raisons pour lesquelles je considère la Poule comme un hermaphrodite potentiel, et la gonade droite comme une glande rudimentaire à potentialités mâles. J'y ajouterai prochainement d'autres preuves tirées de l'étude de cette gonade droite chez la Poule normale.

PROTISTOLOGIE. — *Les Péridiniens parasites des Radiolaires.*
Note de M. **Édouard Chatton**, présentée par M. F. Mesnil.

Les Radiolaires sont parmi les protistes dont le cycle évolutif est le moins bien connu. Cela tient en partie à leur condition pélagique qui rend leur étude difficile et surtout à la méconnaissance des Péridiniens qui les parasitent très fréquemment et dont les formes végétatives et les spores se substituent si insidieusement et si exactement aux leurs qu'elles ont été données par tous les auteurs comme leur appartenant en propre.

La connaissance que j'ai acquise des Péridiniens parasites m'a permis, en 1919 ([2]), de redresser ces erreurs et de faire avec précision le départ entre ce qui, dans les observations de mes prédécesseurs, revient au Radiolaire, et ce qui au contraire se rapporte à ses parasites péridiniens.

J'ai montré par une discussion serrée du texte et des figures du Mémoire

---

([1]) *Sur l'origine des cellules interstitielles dans le testicule du Coq domestique* (*Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 412).

([2]) *Les Péridiniens parasites* (*Arch. Zool. exp. et gén.*, t. 59, p. 1-475, pl. I-XVIII).

de W. Huth (1913) sur les Thalassicolles que tout ce que cet auteur a appelé Schlauchkerngenese ou Mikrogametogenese (anisosporogénèse de Brandt), est en réalité la sporogénèse d'un Péridinien plasmodial très voisin des *Syndinium* que j'ai fait connaître chez les Copépodes pélagiques (1910, 1919). Seule la Spindelkerngenese de Huth (isosporogénèse de Brandt) représente l'évolution normale du Radiolaire indemne. Même interprétation des observations de Brandt (1890, 1895, 1902) et de Borgert (1897, 1900, 1909).

L'étude critique de la grande monographie des Radiolaires coloniaux de Brandt (1905) me permettait d'affirmer chez eux aussi l'existence de Péridiniens parasites : « Chez les Polycyttaires il n'a pas été décrit moins de quatre modes de reproduction. Il faudra faire là aussi la part du parasitisme. Des Péridiniens, des Syndinides y sont certainement en cause. Leur existence s'affirme par les anisospores gymnodiniennes des *Sphærozoum*. Certains stades végétatifs et de sporulation de ces Radiolaires présentent les concrétions très particulières qui existent d'une manière constante dans le plasmode des *Syndinium* (1920, p. 415) [1]. J'écrivais encore (1919, p. 336) : « Il y a de fortes présomptions pour que les corps extracapsulaires soient de nature parasitaire. »

En ce qui concerne les Thalassicolles, rien n'a été publié jusqu'ici qui confirme ou infirme mes vues. Mais chez les Polycyttaires et particulièrement chez *Collozoum inerme*, Hovasse (1923) [2] a récemment montré la structure syndinienne des masses plasmodiales intracapsulaires qui sont à l'origine de l'anisosporogénèse. Il les a nommées *Syndinium Brandti*. Hovasse considère aussi les corps extracapsulaires comme de nature parasitaire.

J'ai pu, à Banyuls-sur-Mer, réétudier chez plusieurs espèces, depuis les stades initiaux jusqu'à la libération des spores, la prétendue anisosporogénèse des Radiolaires coloniaux et établir définitivement qu'il s'agit bien là de l'évolution de Syndinides parasites.

J'expose les raisons de cette certitude telles qu'elles résultent d'abord (A) de l'étude de *Collozoum inerme*, de *Myxosphæra cœrulea*, de *Spœrozoum punctatum* et de *S. acuferum*, puis (B) de celle de *Collozoum pelagicum*.

A. A tous les stades de l'évolution normale du Radiolaire (isosporogénèse), il n'y a dans le cytoplasme continu des capsules centrales qu'une seule catégorie de noyaux à

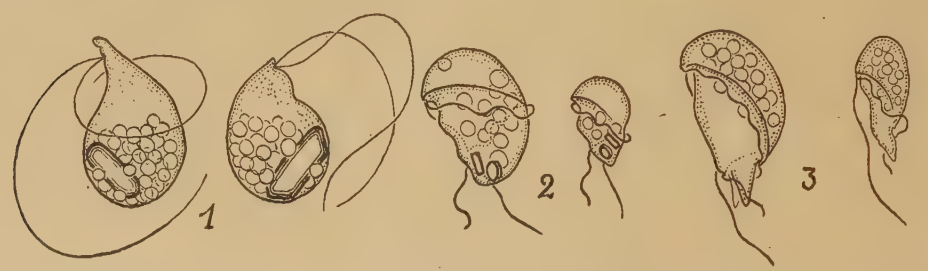
---

(1) *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 413.

(2) *Bull. Soc. Zool. France*, t. 48, p. 247-254.

très nombreux et très fins chromosomes, qui deviennent les noyaux des isopores (*fig.* 1).

Au contraire chez les Radiolaires « en anisosporogénèse », il y a toujours, comme le montrent déjà bien les figures de Brandt, et comme l'a vu Hovasse, incluses dans le cytoplasme du Radiolaire, bien distinctes de lui, des masses d'abord uni- puis plurinucléées, dont les noyaux sont identiques à ceux des *Syndinium* tels que je les ai décrits en 1920. Ces masses que j'appelle sporoblastes se multiplient par plasmotomie tout en s'accroissant et finissent par se substituer complètement au cytoplasme de la capsule centrale, laminant entre eux ses noyaux.



1. Isospores de *Collozoum inerme*. — 2. Dinospores de *Merodinium Brandti* de *Collozoum inerme*. — 3. Dinospores de *M. mendax* de *Myxosphæra cœrulea*.

2° Au centre des sporoblastes s'accumule une subtance grasse, sous forme d'une grosse inclusion mamelonnée semblable à celle que renferme le plasmode des *Syndinium* des Copépodes (cf. Chatton, 1919, pl. XIII, fig. 141).

3° Les spores que forment les sporoblastes sont du type syndinien caractéristique (*fig.* 2 et 3). Très altérables, elles n'avaient été représentées jusqu'ici que très déformées.

B. Chez le *Collozoum pelagicum* le péridinien est à l'état de sporoblastes uninucléés, dont le cytoplasme est extrêmement difficile à distinguer de celui du Radiolaire.

Le parasite de *Collozoum pelagicum* est donc bien distinct de celui de *Collozoum inerme* par ses formes végétatives. Mais même dans les cas où les formes végétatives sont très semblables, l'étude des spores met en évidence les caractères distinctifs des espèces (*fig.* 2 et 3).

Je crois légitime et utile de distinguer spécifiquement les uns des autres les Péridiniens parasites des Radiolaires que j'ai étudiés et de les séparer génériquement des *Syndinium* des Copépodes pélagiques. Ceux-ci sont caractérisés par leurs plasmodes massifs, leurs spores fusiformes et régulièrement turbinées, leur parasitisme dans la cavité générale des Copépodes. Les Péridiniens des Radiolaires s'en écartent à la fois par la fragmentation initiale et persistante des plasmodes, par leurs spores piriformes et leur parasitisme intracellulaire. Je ferai pour eux le genre *Merodinium* (type *M. Brandti*) avec le sous-genre *Solenodinium* pour distinguer les parasites intranucléaires des Thalassicolles à plasmodes plus massifs et tubuleux (type : *S. fallax* n. sp. de *Thalassicolla spumida*). Quant aux espèces, je propose de les nommer : celle du *Collozoum pelagicum* : *Merodinium insidiosum*, de *Myxosphæra cœrulea* : *M. mendax*, de *Sphærozoum punctatum* : *M. dolosum*, et de *S. acuferum* : *M. astutum*. Toutes ces formes appartiennent à la famille des Syndinides telle que

je l'ai définie en 1919. A cette définition j'ai ajouté, en 1920, un caractère qui apparaît maintenant comme le plus général et le plus précis, et qui permet de reconnaître les Syndinides à tous les stades de leur évolution : noyau présentant en prophase ou en anaphase 5 chromosomes en V.

En résumé, chez tous les Radiolaires Polycyttaires et Collodaires chez lesquels on a décrit une «anisosporogénèse», celle-ci représente l'évolution de Péridiniens qui vivent en parasites dans le noyau ou dans le cytoplasme de la capsule centrale, qui s'y substituent sans altérer ni la forme de l'individu, ni celle des colonies et même sans inhiber leur multiplication et qui sporulent suivant un mode très analogue à celui du Radiolaire lui-même.

La connaissance de ce parasitisme insoupçonné jusqu'en 1919, qui a compliqué et faussé l'étude du cycle évolutif des Radiolaires, nous permet maintenant de la reprendre sur un terrain déblayé et des bases solides.

PATHOLOGIE. — *Diphtérie aviaire et épithélioma contagieux.* Note de MM. **L. Panisset** et **J. Verge**, présentée par M. E. Leclainche.

L'étude clinique de la diphtérie aviaire permet de reconnaître deux formes :

1° Une forme aiguë, à localisations variables ;

2° Une forme chronique.

Forme aiguë. — C'est la modalité la plus fréquente ; elle se traduit par des types morbides bien distincts :

a. Type épithéliomateux ou variolique, caractérisé par l'apparition de nodules au niveau de la crête, des paupières et des barbillons ; au pourtour des yeux, des oreilles et du bec ; parfois même sur les régions emplumées.

b. Type pseudo-membraneux ou diphtéroïde, dans lequel les exsudats, plus ou moins abondants, siègent sur les muqueuses buccale, pharyngée et laryngée.

c. Type inflammatoire ou catarrhal, débutant par un coryza intense, des manifestations oculaires et la tuméfaction du sinus infra-orbitaire (catarrhe oculo-nasal). On assiste souvent à la fonte purulente de l'œil.

Ces différents processus peuvent s'associer entre eux et il n'est point rare de les rencontrer sur un même sujet.

Forme chronique. — Elle résulte souvent de la forme aiguë, mais peut s'installer d'emblée.

Elle se manifeste presque toujours par le type diphtéroïde classique, très

atténué; les oiseaux atteints constituent des porteurs de virus extrêmement dangereux et, partant, des vecteurs insoupçonnés de l'infection.

Expérimentalement, il est possible de reproduire les lésions pseudomembraneuses ou catarrhales en partant d'un virus épithéliomateux et inversement :

On prélève, sur le cadavre d'un dindon de cinq semaines, les tumeurs épithéliales situées sur le cou et le thorax. Ces nodules sont broyés, puis émulsionnés en sérum physiologique.

Le virus ainsi obtenu est inoculé dans la veine axillaire d'une poule neuve, en même temps qu'on opère de simples scarifications, non virulentes, au niveau de la crête et de la peau du bréchet, déplumée au préalable.

Le cinquième jour, on assiste à l'éclosion de fines plaques blanchâtres sur la voûte palatine et de nodules sur la crête; le septième jour, les lésions des muqueuses sont très étendues et très accusées; le dixième jour, les premières voies digestives et respiratoires sont totalement envahies par les fausses membranes; les yeux sont clos; il existe de la conjonctivite et du coryza; la crête, les paupières et les barbillons sont recouverts de croûtes; les traits de scarification du bréchet présentent de petites tumeurs, blanchâtres et hémisphériques.

Au quinzième jour, cette poule est sacrifiée. Son cerveau, extrait aseptiquement, est broyé en mortier stérile et émulsionné dans quelques centimètres cubes de sérum physiologique. L'insertion de cette émulsion sur la crête scarifiée d'une poule saine déclenche, le cinquième jour, l'apparition de lésions épithéliomateuses typiques, réinoculables en série.

Inversement les exsudats diphtéroïdes bucco-pharyngés d'une poule atteinte de maladie naturelle sont broyés en eau physiologique et inoculés à plusieurs poules saines, par badigeonnage de la crête scarifiée. Le dixième jour, on assiste à l'évolution de *quelques* boutons, présentant des caractères identiques à ceux des nodules épithéliomateux et, comme eux, réinoculables en série. En outre, on voit une des poules présenter, vers le vingtième jour, des lésions discrètes au niveau de la langue et de la voûte palatine.

Comment expliquer, dans ce cas, la virulence (en vérité peu marquée pour le derme) des fausses membranes de la diphtérie aviaire? Dans les tumeurs épithéliomateuses de la crête et des barbillons, il semble que le virus se trouve à l'état de pureté. Au contraire, dans les exsudats diphtériques de la bouche ou de la gorge, le virus filtrant disparaîtrait devant la flore de sortie qui s'associe et, peu à peu, se substitue à lui.

Ces multiples expériences (que nous avons reproduites avec le même succès à différentes reprises) mettent en lumière plusieurs points importants dans l'étude de la diphtérie aviaire :

1° Les trois types précédemment décrits (épithéliomateux, diphtéroïde, catarrhal) sont expérimentalement interchangeables : la diphtérie aviaire

et l'épithélioma contagieux ne constituent point des entités morbides distinctes et relèvent d'un même ultra-virus ([1]).

2° La durée d'incubation de la maladie expérimentale varie, chez la poule, de 2 à 6 jours.

3° Ainsi que l'avait déjà signalé Burnet, l'inoculation virulente intraveineuse permet de reproduire, dans ses aspects multiples, le tableau de la maladie naturelle. De plus, les tumeurs épithéliomateuses apparaissent en certaines régions préalablement scarifiées (crête, peau déplumée) et procurent ainsi une source abondante de virus.

4° Le cerveau des oiseaux expérimentalement infectés est virulent.

5° Le virus épithéliomateux présente une affinité certaine : pour le segment extérieur de l'ectoderme (peau, crête, barbillons); pour le segment bucco-pharyngé de l'ectoderme; pour le segment invaginé de l'ectoderme (système nerveux central).

M. **H. Lœwenstein** adresse une Note *Sur un nouveau procédé d'utilisation de l'énergie des vagues.*

A 15ʰ45ᵐ l'Académie se forme en comité secret.

La séance est levée à 16ʰ10ᵐ.

A. Lx.

([1]) Toutefois, certaines formes de diphtérie aviaire peuvent être déterminées par des éléments pathogènes nettement différents de l'ultra-virus épithéliomateux : bacille de Löffler par exemple.

ERRATA.

(Séance du 12 novembre 1923.)

Note de M. *Ph. Joyet-Lavergne*, La structure cytoplasmique d'une coccidie :

Page 976, ligne 18, *au lieu de* microgamète, *lire* microgamétocyte; ligne 27, *au lieu de* granules dans le microgamète, *lire* granules dans le microgamétocyte.

(Séance du 19 novembre 1923.)

Note de MM. *Charcot* et *Louis Dangeard*, Recherches de Géologie sous-marine en Méditerranée (croisière du « Pourquoi-Pas? » 1923) :

Page 1049, ligne 12, *au lieu de* 60^{m}, *lire* 200^{m}.